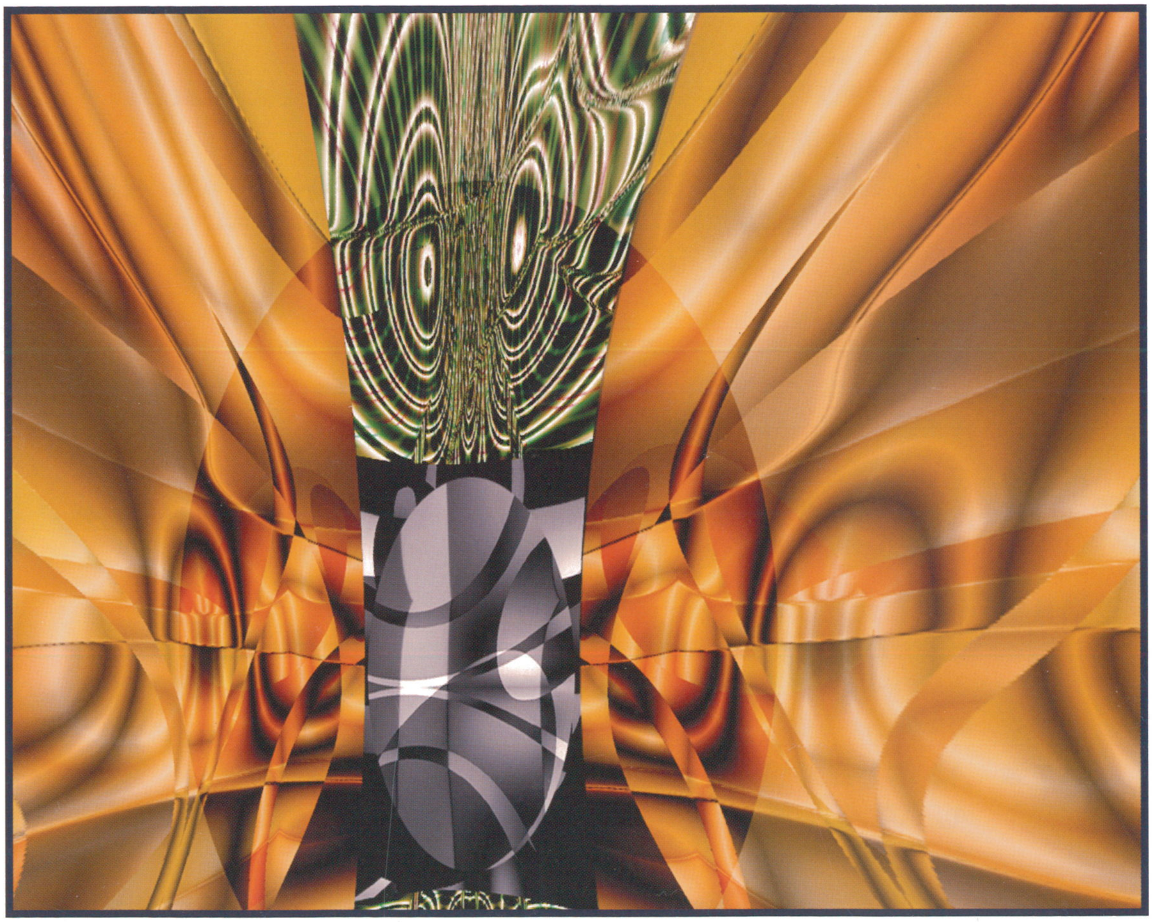
昭和38年７月２日第３種郵便物認可
2010年９月１日発行　第48巻９号　毎月１回１日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

9
2010

特集　南部陽一郎
学んで考え，考えて学ぶ物理の奥義



No.567

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 567 September 2010

南部陽一郎

学んで考え，考えて学ぶ物理の奥義

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2007 年/11 省略
2007 年/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて

数理科学臨時別冊一覧

08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方
09 年/7 ゲージ理論の発展
09 年/9 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
09 年/11 重点解説 基礎微分幾何
09 年/12 ε–δ 論法再入門
10 年/1 多彩な量子の世界
10 年/3 超関数・フーリエ変換入門
10 年/5 問題例で深める物理
10 年/6 非線形現象と微分方程式
10 年/7 数物系のための圏論

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

September 2010 MATHEMATICAL SCIENCES Number 567

特集／南部陽一郎

南部陽一郎の物理

その広さ，深さに迫る

吉村 太彦

南部陽一郎先生（以下敬称略）は，私の大学院時代の学位論文指導教員であり，かつ青春時代のあこがれの対象であった人でもあり，とうてい完全に客観的な立場からこの人のことを書くことはできない．しかし，私がシカゴ大学を去ってからは，おつきあいしていただいたことが，1カ月を最大として数回ぐらいであり，また私が年長者になってからはややこの人を客観的に見ることもできたかと思うので，あえてこの仕事を引き受けることにした．

実に久しぶりに南部の話をまとまって聞いたのは，昨年10月に京都大学基礎物理学研究所での仁科講演会での一般向け講演である．そのときの講演は，自発的対称性の破れをかみ砕いて大学生程度に分からせる内容だったが，例によって，簡潔ながら味のある話だった．いつもどおり，含蓄のあるたとえ話に感心したが，その講演内容よりもさらに印象深かったのは講演後の質疑であった．

質疑の一つにどうすれば物理学をマスターできるか，という趣旨の若い人からの質問があった．南部の答えは，楽しむこと，であった．質問者にはどうすれば偉い物理学者になれるかを知りたいという意図があったかと思われるが，南部は，そんな野心はさておいて，物理を深く理解することにより楽しみなさい，また楽しむことが新しい創造への糸口である，という趣旨の答えをした．

南部と物理の話をしていると，いつも物理を楽しんでいる，という印象を私は学生時代から持ち続けてきた．ある程度親しくなると，南部は相手の年齢，業績等にあまり構わずに自分がそのときに考えていることを話し出す．当初はなぜ研究者仲間でもあまり話題にならないことを考え続けているのか理解に苦しむ．しかし，30分ほど話を聞いていると，南部の考えが素粒子物理，もっと広くは基礎物理の根幹に関わる問題を扱っていることに気づく．

南部の物理を知るには彼の書いた論文を読むより，彼から話を聞く，しかも完成前に話を聞くほうがはるかに分かりやすい，これが私の持論である．事実，楽しんでいる人から楽しんでいる内容を聞けるのは間違いなく聞くほうも楽しい，その楽しさが理解への近道である，と断言できる．

しかし，楽しみなさいと言われてもどうしたら楽しむようになれるのかを教えられないと，役に立つ忠告とは言えない．これに関して，南部は別なところで“論語”を引用して，“学びて思わざればすなわち暗し．思うて学ばざればすなわち危うし．”（注：原文では，暗い，危うい，という単語にこれとは異なる漢字が使われている．）といっているのがその答えになろう．学びかつ考える，これを同時に心がける，その繰り返しが，南部流の解釈では，楽しむことにつながる，私も全く同感

である．幸い物理学は体系的かつ応用の広い学問であるから，いくら学んでもおしまい，ということにはならない．学ぶだけで一生涯を終えることも可能だろうが，それでは楽しくない，楽しむためには自分で考えて答えを出す，その答えが学ぶ内容を深め次の学ぶことにつながる，この繰り返しはこの学問の醍醐味であろう．

私も60歳を超える頃から，このことが分かってきた．自分の専門分野などにこだわることなくやるべきことは楽しみながら探せる，また楽しみながら人を感化でき，人材育成にも寄与できる．

表題にある，深さと広さは南部においては同じことである．深く学ぶには実は広く実例を知らねばならない．対称性の自発的破れもいきなり素粒子論への応用を思いつけるわけではない．凝縮系の超伝導理論への深い理解が，広い応用，ひいては一般的な原理発見への道となったと思われる．

南部は素粒子論の構築・完成という明確な目標とビジョンを持ちつつ，しかしそれは限られた人間の寿命の時間内には困難であることを認識しつつ，より一般的な物理学の原理発見にも関心を持ち続けた．従って，素粒子物理学の特定の狭い専門に閉じこもることなく，広くまた深く探求を続けてきた．このような人物から学ぶべきことは多い．しかし，ともに研究するのは至難の業である．ある意味で自己流を徹底するのが南部物理の神髄である．この流儀を共同で追うのは，自己流により独立しようとする若手研究者にはマイナスとなりえる．南部自身も学生の指導にあたり，そのことをよく心得ていた．あくまでも学生の自主性を尊重してよいアドバイザーに徹することにより学位指導を実践してきたのは，アメリカの一般的な伝統とは異なる．

参考文献に，南部自身の人柄と研究スタイルを知る上で役に立つ，最近刊行された書物を掲げた．私の不十分な南部論を補っていただければ幸いである．

南部陽一郎先生略年譜

1921 年	東京に生まれる
1923 年	福井市に転居
1940 年	第一高等学校卒業
1942 年	東京帝国大学理学部物理学科卒業
同　年	東京帝国大学助手
1949 年	大阪市立大学理工学部助教授
1950 年	同大学理論物理学教室教授（1956 年まで）
1952 年	東京大学より理学博士号を取得
1952 年	渡米．プリンストン高等研究所（当時の所長は R. オッペンハイマー）
1954 年	シカゴ大学に移籍
1958 年	同大学教授
1961 年	ノーベル賞対象論文「対称性の自発的破れの素粒子物理への応用」発表
1965 年	カラー自由度とカラーゲージ力の導入
1970 年	アメリカ合衆国に帰化
同　年	ひも理論を提案（後藤氏とは独立の仕事）
同　年	ハイネマン賞数理物理学部門受賞
1977 年	オッペンハイマー賞受賞
1978 年	文化勲章受章
1979 年	福井市名誉市民
1982 年	アメリカ国家科学賞（物理学部門）受賞
1985 年	マックス・プランク・メダル受賞
1986 年	ディラック賞受賞
1991 年	シカゴ大学エンリコ・フェルミ研究所名誉教授
1994 年	ウルフ賞物理学部門受賞
2005 年	ベンジャミン・フランクリン・メダル受賞
2008 年	ノーベル物理学賞受賞

参考文献

1) 南部陽一郎著，福井新聞社編『ほがらかな探求』2009 年 5 月発刊．
2) 南部陽一郎著，江沢洋編『素粒子論の発展』岩波書店，2009 年 3 月発刊．

（よしむら・もとひこ，岡山大学理学部）

「対称性の自発的破れ」
ノーベル賞受賞テーマ



細谷 裕

1. はじめに

対称性って何だろう．対称性が破れるとはどういうことなのだろう．自発的に破れるとは何とも難しい．どうして，物理では対称性が大事なのだろう．わからないことばかりだ．

物理は何を明らかにするのか．自然現象を記述するだけでは物理にならない．同じ一つの考え方で，すべての自然現象を説明する．状況が与えられれば，結果を定量的に予言する．そこには法則がある．原理がある．運動方程式は定量的な記述を与える．運動方程式を解けば，現在の情報から将来を予想できる．目の前にある自然現象を説明できる．

物理における対称性とは，運動方程式が持つ対称性である．その対称性が自発的に破れるとはどういうことなのだろうか．南部は，物質の最小構成要素，素粒子の世界に潜む隠れた対称性を明らかにした．その背後には，自然に対する見方，考え方の大変革が秘められていた．南部の考察に沿って，その謎解きをしてみよう．

2. 物理法則の普遍性

科学，物理は普遍なものだ．誰でも，どこでも，いつでも同じ物理が使える．誰でも使えるとは，物理の基本法則は観測者，実験をする人によらないということだ．どこでも使えるとは，単に隣町だけでなく，地球の裏側，地球の内部，月の上，太陽の中，遠い銀河のはて，宇宙空間の真ん中でも同じ物理法則が成り立つことを意味する．そして，いつでも使えるとは，現在でも，100 年前でも 100 年後でも，あるいは地球が生まれたときでも，宇宙の大爆発があった 137 億年前でも，現在知られている物理の基本法則がそのまま適用できるということだ．

これは物理・近代科学の出発点だ．ニュートンの運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{1}$$

は普遍的である．単純なこの方程式が大自然を支配している．この方程式は誰もが使え，我々が時空のどこに位置するか，どのように動いているかは本質的なことではない．つまり，自然科学に関する限り，すべての観測者は同等であり，特別なものは何もない．これは相対性原理と言われる．相対性原理なくして物理はあり得ない．

3. 対称性

この出発点というべきニュートンの運動方程式 (1) は様々な対称性を持っている．もちろん，右辺の力ベクトル $\vec{F}$ が与えられなければ，粒子の運動は決まらないが，基本相互作用のレベルでは，相手の粒子との相対的な位置関係だけが重要になってくる．この事実は，簡単な例として，2 粒子系

のハミルトニアン H を書いてみるとよくわかる．

$$H = \frac{\vec{p}_1{}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2{}^2}{2m_2} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \ . \qquad (2)$$

ここで，$m_j, \vec{r}_j, \vec{p}_j$ は粒子 $j\ (=1,2)$ の質量，座標，運動量である．最初の 2 項は運動エネルギーを，最後の V は 2 粒子間のポテンシャルを表す．ポテンシャル V は，重力ポテンシャルやクーロン・ポテンシャルの場合，2 粒子間の距離だけによる．この場合，ハミルトニアン H は，回転不変になっている．つまり，空間のどの方向も同等で，特別な方向というものはない．このことをハミルトニアン H は回転対称性を持っていると言う．すべての物理の基本法則は回転対称性を持っている．

式 (2) のハミルトニアンはさらに空間座標をずらしても不変で，空間並進対称性も持っている．このように，基本法則は様々な対称性を持っていることがわかる．これは偶然だろうか．

対称性の威力を見るのに，もしハミルトニアン H が回転対称性も空間並進対称性も持たないとしたらどうなるか考えてみよう．(2) で，V は一般には $\vec{r}_1$ と $\vec{r}_2$ の任意の関数 $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ となる．粒子間の相互作用を決める手だてがなくなってしまう．

基礎理論・物理法則は対称性の下に大きく制限される．物理は簡単になり明晰になる．往々にして，物理屋はこれを美しいという．なぜ，自然現象を記述する法則が美しいのか，近代・現代物理学は，そこに必然的な理由があることを明らかにしつつある．

一つコメントを付け加えておこう．物理における対称性には，基礎理論のもつ対称性とランダムさがもたらす対称性がある．前者の極みは素粒子理論によって，後者の極みは統計力学によって説明される．

4. 素粒子の相互作用

ここで，ひとっ飛びに素粒子間に働く力，相互作用に移ろう．物質の最小構成要素はクォークとレプトンである．電子やニュートリノはレプトンの一種であり，陽子や中性子は 3 個のアップクォークとダウンクォークによって構成される．重力は，一般相対性理論によると，物質によってもたらされる時空のひずみにより引き起こされる．他の力はゲージボゾンの交換によって媒介される．電磁相互作用，弱い相互作用，強い相互作用は光子（光の量子），W ボゾン，Z ボゾン，グルーオンにより媒介される．

南部が素粒子物理学における対称性の自発的破れの理論を展開した 1960 年前後，まだ弱い相互作用と強い相互作用の正体は不明であった．後に，これらはゲージ理論により記述されることが判明した．電場，磁場を記述するマクスウェル理論もゲージ理論である．電磁場の拡張であるグルーオン場が強い相互作用を，W ボゾン，Z ボゾン場が弱い相互作用を媒介する．マクスウェル理論は $U(1)$ のゲージ対称性をもつ．強い相互作用を記述する理論は量子色力学（QCD）と呼ばれ，$SU(3)$ のゲージ対称性をもつ．弱い相互作用は電磁相互作用と統合され，$SU(2) \times U(1)$ ゲージ対称性をもつ電弱統合理論で記述される．

この素粒子の標準理論にどのようにしてたどりつくことができたのか．その革命的な分岐点を南部は超伝導を記述する理論から読み取った．当時溢れるように出てきたハドロンの実験データ，とくに，パイ中間子の物理に潜む規則性と物性物理学で完全に独立に発展していた超伝導の物理が南部の頭の中でアナロジーのように結びついたとき，素粒子の世界の真空は空っぽの空間から，粒子が見えない形で埋め尽くされた媒質に変身する．パイ中間子は，質量が無から生成される過程で生まれる．後の電弱統合理論も相対論的な超伝導理論として実現される．ここでのキーワードが**対称性の自発的破れ**である．

5. 超伝導の物理

1957 年，バーディーン・クーパー・シュリーファー（Bardeen, Cooper, Schrieffer）は超伝導の理論（BCS 理論）を発表した[1)]．超伝導現象が

見事に説明されたのだが，BCS 理論を理解するうえで南部をパズルの虜にさせたことがあった．それは，BCS 理論ではどうも電子数が保存していない，ゲージ不変性が壊れているということであった．詳しく見てみよう．

ミクロな世界は，量子論が支配する．量子論では，波動関数という複素数の場が物理系を記述する．物質中の電子もしかり，電子は粒子であると同時に波であり，電子の波動関数は複素数の場である．

エネルギー的に最も安定な状態，最低エネルギーの状態を基底状態と呼ぶ．電子間の相互作用，ハミルトニアン H が与えられたとき，電子の系の基底状態を見つけることが物理屋の仕事である．バーディーン・クーパー・シュリーファーは，超伝導状態を表す基底状態をあらわに書き下したのだ．

粒子描像にたって基底状態を表そう．運動量 $\boldsymbol{p}$，スピン $\uparrow$ ($\downarrow$) の電子を消滅する演算子を $c(\boldsymbol{p},\uparrow)$ ($c(\boldsymbol{p},\downarrow)$) と書く．電子を生成する演算子は $c^\dagger(\boldsymbol{p},\uparrow)$ ($c^\dagger(\boldsymbol{p},\downarrow)$) となる．この生成演算子を使うと，BCS 基底状態は

$$|\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha)\rangle = \prod_{\boldsymbol{p}} \{u_p + e^{2i\alpha} v_p c^\dagger(\boldsymbol{p},\uparrow) c^\dagger(-\boldsymbol{p},\downarrow)\}|0\rangle \quad (3)$$

となる．ここで，$|0\rangle$ は電子が 1 個もない状態を表す．係数 u_p, v_p は与えられた平均電子密度でエネルギーを最低にするように決められる．

(3) の中の $c^\dagger(\boldsymbol{p},\uparrow)c^\dagger(-\boldsymbol{p},\downarrow)$ の項は，運動量とスピンが $(\boldsymbol{p},\uparrow)$ と $(-\boldsymbol{p},\downarrow)$ の電子の対（クーパー対）を作る．u_p と v_p の両方が零でなければ，BCS 基底状態 (3) は，各運動量で，電子のクーパー対があったり，なかったりする状態の重ね合わせになっている．つまり，基底状態は電子数が決まった状態ではない．

これは一大事だ．ハミルトニアン H は電子を消滅する演算子 c と生成する演算子 $c^\dagger$ で表されるが，いつも $c^\dagger c$ と $c^\dagger c^\dagger cc$ の形をしている．つまり粒子数を保存する．基底状態はハミルトニアン H の固有状態である．その基底状態で，粒子数が決まっていないとはどういうことなのか．

量子論では，粒子数の保存は波動関数の位相変換と関連している．ハミルトニアンの言葉でいうと，消滅生成演算子に位相変換

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{p},\sigma) &\to e^{i\beta}c(\boldsymbol{p},\sigma)\,, \quad (\sigma=\uparrow,\downarrow) \\ c^\dagger(\boldsymbol{p},\sigma) &\to e^{-i\beta}c^\dagger(\boldsymbol{p},\sigma)\,, \end{aligned} \quad (4)$$

を施しても，ハミルトニアンは不変である．しかし，BCS 基底状態 $|\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha)\rangle$ はこの変換の下で $|\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha+\beta)\rangle$ に変わる．（$\alpha \neq \alpha'$ のとき，$\langle\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha)|\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha')\rangle = 0$ である．）つまり

ハミルトニアン：位相変換で不変
基底状態：不変でない　(5)

となる．電子は電荷を持っており，位相変換は電磁場のゲージ変換と結びついている．(5) の性質は，「ハミルトニアンはゲージ不変だが，その固有状態である基底状態ではゲージ対称性が破れている」ともいう．

6. 対称性の自発的破れ

もっと一般に，

> 理論（ハミルトニアン）は対称性をもっているが，基底状態でその対称性が壊れている．

とき，対称性が自発的に破れると言う．ハミルトニアンがもつ対称性は，考えている物理系を記述する理論の対称性である．対称性で結びつく状態は，同じ確率で実際に実現され得る．例えば，回転対称性を考えよう．物理の基礎理論は回転対称であり，ハミルトニアンは回転対称性を持っている．ところが，強磁性体の一部の領域（ドメイン）を見ると，ある方向に磁化がある．一つの方向が選ばれている．別の方向に磁化があっても，何もおかしくない．強磁性体の中では，回転対称性が自発的に破れている．

どうして，こんなことが起こるのだろうか．状態のエネルギーを考えるとよい．前節で説明した超伝導の場合の系のエネルギーをプロットすると図 1

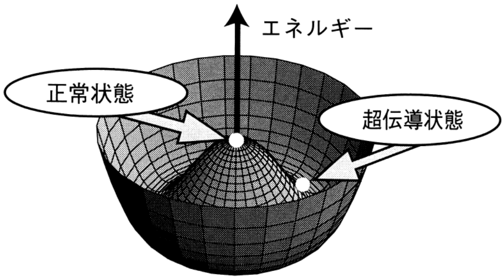


図 1　エネルギーの最低状態は超伝導状態である．正常状態は真ん中の点に対応する．真ん中の山の上の対称な点はエネルギーが高く，物理的に不安定で，対称性の自発的破れが起こり，超伝導状態になる．

のようになる．このエネルギー・ポテンシャルは，中心軸の周りに対称である．(4) の位相変換は中心軸の周りの回転に対応している．この回転（位相変換）に対して，正常状態は不変である．しかし，正常状態はエネルギーの山の頂上にあって，わずかな揺らぎの下で，谷底に落ちてしまう．谷底の安定な状態が超伝導状態 $|\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha)\rangle$ である．$|\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha)\rangle$ は，位相変換（回転）の下で $|\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha+\beta)\rangle$ に変わる．つまり，超伝導状態では位相変換対称性（ゲージ対称性）が自発的に破れている．

7. 南部の超伝導理論とディラック理論

BCS 基底状態 (3) は粒子数（電子数）の固有状態ではない．これはどういうことだろうか．励起状態を見ると，不思議さはもっと顕著になる．電子の消滅と生成を組み合わせる

$$\xi(\boldsymbol{p},\uparrow)=e^{-i\alpha}u_p c(\boldsymbol{p},\uparrow)-e^{i\alpha}v_p c^\dagger(-\boldsymbol{p},\downarrow) \quad (6)$$

を考えると，$\xi(\boldsymbol{p},\uparrow)|\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha)\rangle=0$ であることが示せる．$\xi(\boldsymbol{p},\uparrow)$ は準粒子の消滅演算子と呼ばれる．BCS 状態は準粒子の**真空状態**なのだ．逆に，そのエルミート共役 $\xi^\dagger(\boldsymbol{p},\uparrow)$ は準粒子の生成演算子で，エネルギー励起を引き起こす．エネルギーの励起は電子を作る操作と消す操作の重ね合わせなのだ．どうしてそんなことが可能になるのだろうか．そこには，「真空」という概念に対する大変革が隠れている．

南部は次の点に着目した[2]．BCS 基底状態 $|\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha)\rangle$ は，次の南部ハミルトニアン H_{Nambu} の厳密な基底状態になっている．

$$H_{\mathrm{Nambu}}=\sum_{\boldsymbol{p}}\Psi^\dagger(\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}\epsilon(\boldsymbol{p})+\chi(\boldsymbol{p}) & \Delta(\boldsymbol{p})\\ \Delta(\boldsymbol{p}) & -\epsilon(\boldsymbol{p})-\chi(\boldsymbol{p})\end{pmatrix}\Psi(\boldsymbol{p}),$$

$$\Psi(\boldsymbol{p})=\begin{pmatrix}c(\boldsymbol{p},\uparrow)\\ c^\dagger(-\boldsymbol{p},\downarrow)\end{pmatrix}. \quad (7)$$

$\epsilon(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}^2/2m$ で，$\chi(\boldsymbol{p}),\Delta(\boldsymbol{p})$ は相互作用の効果を表し，(3) の $|\Psi_{\mathrm{BCS}}(\alpha)\rangle$ に現れる u_p,v_p と関係している．

2 成分場 $\Psi(\boldsymbol{p})$ を見てほしい．第 1 成分は電子を消し，第 2 成分は電子を作る．H_{Nambu} の中の $\Delta(\boldsymbol{p})$ 項はこの 2 つを混ぜ，超伝導を引き起こす．係数 $\Delta(0)$ はエネルギー・ギャップである．$\Delta(\boldsymbol{p})\neq 0$ は電子のクーパー対凝縮を表す．

このハミルトニアンを見て，南部はこれが相対論的な陽子や中性子を記述するディラックの理論と類似していることに気づいた．ディラックのハミルトニアン

$$H_{\mathrm{Dirac}}=\sum_{\boldsymbol{p}}\psi^\dagger(\boldsymbol{p})\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\sigma & m\\ m & -\boldsymbol{p}\sigma\end{pmatrix}\psi(\boldsymbol{p}) \quad (8)$$

と見比べよう．$\psi(\boldsymbol{p})$ は 4 成分の陽子場，m は陽子の質量である．2 成分と 4 成分の違いを除いて，2 つのハミルトニアンの構造がよく似ている．

超伝導状態を特徴づける H_{Nambu} のギャップ $\Delta(\boldsymbol{p})$ は，H_{Dirac} の質量 m に対応している．質量が超伝導を表すのだろうか．南部のアナロジーは急展開する[3]．

8. カイラル対称性と質量の生成

南部は講演「私が歩んできた道」の中で，数学的，数式的に似ているところにアナロジーを働かせ，それをひねくり，見方を変えてみて突然何か気がつくことがよくあると述べている[4]．超伝導では電子間の相互作用の結果，ギャップ $\Delta(\boldsymbol{p})$ が

生まれる．ということは，陽子・中性子の場合，相互作用の結果，質量が生成されることを意味しないか．

歴史を先回りして述べると，南部の質量生成の機構は，陽子・中性子を構成する（当時，まだ概念すらなかった）クォークにあてはまることが判明する．(8) の H_{Dirac} に現れる $\psi(\boldsymbol{p})$ はクォーク場である．強い相互作用，量子色力学によってクォークの質量が生まれ，我々が観測する陽子や中性子の質量になるのだ．

超伝導の H_{Nambu} に現れる $\Psi(\boldsymbol{p})$ は電子の生成と消滅を組み合わせたものだった．H_{Dirac} のクォーク場は左巻き（L）と右巻き（R）を組み合わせた

$$\psi(\boldsymbol{p}) = \begin{pmatrix} \psi_L(\boldsymbol{p}) \\ \psi_R(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix} \tag{9}$$

で，質量項は左巻きと右巻きを混ぜる．

質量が零のときは，左巻きと右巻きは独立になり，それぞれ位相変換しても不変だというカイラル対称性がある．このカイラル対称性が素粒子超伝導で自発的に破れ，質量 $m \neq 0$ が生成されるというわけだ．エネルギーは図 1 と同じようになる．質量が零の状態は正常状態，質量が生成された状態は超伝導状態に対応する．質量が生成された状態のほうがエネルギーが低く，安定なのだ．

この奇想天外な発想は，超伝導の物理の考察と共に，南部が当時取り組んでいたもう一つの問題，パイ中間子の物理からもヒントを得て作り上げられた．パイ中間子の質量が他の中間子や陽子・中性子と比べて異常に小さいのはどうしてだろう．

図 1 のエネルギー（ポテンシャル）をもう一度見よう．谷の底がカイラル対称性が破れ，質量が生成された状態だ．我々の世界は，そのどこか 1 点に対応する．すると，その点から谷底に沿って揺らぎが生じる．この揺らぎが量子論ではパイ中間子として観測される．エネルギー的には変化がないので，パイ中間子は零質量の粒子として現れる．現実のパイ中間子は小さな質量を持っている．これは，ポテンシャルがわずかに傾いているから

なのだが，詳細はここでは忘れよう．

パイ中間子はカイラル対称性の自発的破れに伴って出てくる粒子である．一般に，対称性が自発的に破れるとき，それに伴って零質量の粒子（NGボゾン）が現れる．これは，南部・ゴールドストーンの定理と呼ばれる．パイ中間子の実験データからカイラル対称性の自発的破れは間接的に検証されている．近年では，数値計算手法によりカイラル対称性の自発的破れが直接的に確かめられている．

9. 真空は空っぽではない

カイラル対称性が自発的に破れて我々の素粒子の基底状態，真空ができるという南部の考え方には，それまでの素粒子物理学にはなかった自然に対する認識の大変革がある．量子電磁力学（QED）の大成功以来，素粒子の世界の真空とは何もない世界で，そこに粒子があればお互いに力を及ぼし合う，というのが常識以前の考え方であった．仮想的であれ，真空は唯一のものとして定義されていた．

だが，カイラル対称性が自発的に破れてできる基底状態は，BCS の超伝導状態 (3) と同じく，零質量の左巻きと右巻きのクォーク・反クォーク対（カイラル対）があったり，なかったりする状態の重ね合わせである．基底状態，本当の真空，は何もない状態ではないのだ．

BCS 基底状態からのエネルギー励起は，(6) で定義される準粒子を作ることに対応した．同様に素粒子の世界で本当の真空から励起する，つまり，粒子を作ることは，零質量のクォークの生成と反クォークの消滅を混ぜた準粒子を作ることに対応する．つまり，素粒子でいう現実のクォークは準粒子なのだ．

このように，素粒子の世界の本当の真空は，空っぽではなく媒質なのだ．観測される素粒子は，この媒質中で定義される準粒子である．真空は唯一なのではなく，対称性で結びつく無限の同等の状態がある．我々はその一つに住んでいる．理論そのものは対称性を持っているが，本当の真空として基底状態の一つが選ばれることで，対称性は自発的に破れている．

表1　南部の描像．

超伝導体の中の世界	素粒子の世界
対称性が自発的に破れている	
BCS 基底状態 クーパー対の凝縮	真空 空っぽでない媒質
準粒子励起	素粒子（クォーク等）
集団励起モード	NG ボゾン パイ中間子
マイスナー効果 プラズモン	質量をもった W, Z ボゾン

超伝導体の世界と素粒子の世界の対応関係を表1にまとめた．超伝導の物理が素粒子物理学の宝庫であったことがわかるだろう．両者を結びつけるのは対称性の自発的破れである．

10. 対称性が可能にする統一理論

南部理論は1960年代半ばから素粒子相互作用の統一理論へむけて飛躍的に発展する．我々が観測する現実の世界の対称性は保存量と結びつく．電荷の保存は電磁相互作用のゲージ不変性の結果だ．強い相互作用もカラー電荷の保存，$SU(3)$ ゲージ不変性で特徴づけられる．

これに反し，弱い相互作用では厳密な保存量はない．弱い相互作用の基礎理論を構築する上で，要になったのが対称性の自発的破れという概念である．弱い相互作用も電磁相互作用や強い相互作用と同じゲージ相互作用で記述されるのだが，そのゲージ対称性が自発的に破れるために，保存量がないのだ．

実際には，電磁相互作用と弱い相互作用は統一され，電弱統合理論として $SU(2) \times U(1)$ のゲージ不変性をもっている．このゲージ対称性の一部は自発的に破れ，結局，電荷保存に対応する電磁ゲージ対称性だけが残る．この電弱統合理論が定式化されたのは1967年のことであった．

1970年代の発展で明らかにされたのだが，電弱

統合理論にしてこそ，弱い相互作用を理論的に矛盾なく記述することが可能になる．ゲージ対称性がなければ，弱い相互作用を媒介するWボゾン，Zボソンを矛盾なく記述できない．ところが，我々が実験室で観測するかぎり，そのゲージ対称性は見えない．この理論の高い対称性と実験室の小さな対称性を結びつけるのが「対称性の自発的破れ」である．南部理論は，素粒子の統一理論への道を切り開いたと言える．

統一ゲージ理論へのヒントは超伝導の物理にすでにあった．BCS理論が出るずっと前の1950年，ギンツブルグ・ランダウ（Ginzburg, Landau）は，超伝導を記述する現象論（GL理論）をまとめていた[5]．そこでは電弱統合理論でひな形となるゲージボゾンの質量生成機構が隠されていた．このGL理論の存在は当時よく知られていたにもかかわらず，1957年のBCSの論文にも引用されていない．南部は，GL理論をもっと真剣に勉強すべきだったと振り返る．そうすれば，電弱統合理論はもっと早くできあがっていたかもしれない．

物理は，わかってみると簡単で，きれいで明解だ．しかし，わかるまでは謎に包まれている．その謎を解くために物理屋は努力する．

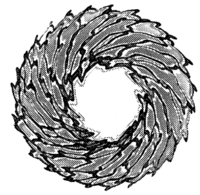
参考文献

1) J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.
2) Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117** (1960) 648.
3) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345.
4) 南部陽一郎，「私が歩んできた道」（ノーベル賞受賞記念講演，大阪大学大学院理学研究科，2009年5月13日），記録集 p.23.
5) V.L. Ginzburg and L.D. Landau, *JETP* **20** (1950) 1064.

（ほそたに・ゆたか，大阪大学大学院理学研究科）

超伝導への傾注

物性物理とハドロン物理から



青木　秀夫・初田　哲男

1. はじめに

超伝導は，南部理論の発祥の地であり，すでに多くのことが語られています．筆者の青木[1,2]，初田[3]もいくつかの解説をしていますが，特に本稿では，それらではあまり詳しく触れられなかった，以下の二点を眼目として解説したいと思います．第一は，超伝導の本質であるマイスナー効果とゲージ不変性に関する問題です．これをミクロに扱うために，南部先生の1960年の論文[4]では，「電磁場のポテンシャルも含めた場の理論を構成すると，マイスナー効果もゲージ不変に議論できる」という視点が議論されており，これを簡単に解説します．第二は，青木が専門とする物性物理学における超伝導[5]と，初田が専門とするハドロン物理学におけるカラー超伝導[6]の比較です．超伝導は，南部理論の言う**ゲージ対称性の自発的破れ**（spontaneous symmetry breaking, SSB）の代表的な現象であり，普通は巨視的な物質で起きるので，固体物理の範疇です．しかし，超伝導は普遍的な現象なので，超伝導固体のエネルギースケールとは桁違いのクォーク物質（例えば中性子星の中心部など）でもカラー超伝導と呼ばれる超伝導状態が可能であると考えられています．ゲージ対称性の自発的破れという点では，超伝導固体と超伝導クォーク物質は共通していますが，もちろん相違点もあり，これを比べてみたいと思います．

超伝導や超流動，あるいはそれに類似した現象は，例えばレーザー冷却された原子系や，分数量子ホール系でも起きますが，本稿では固体とクォーク物質に焦点を絞ろうと思います．ミクロな観点からは，物性での超伝導では，固体に対するハミルトニアンをBCS理論で扱います．ハドロン物理でのカラー超伝導では，クォーク系に対するハミルトニアンをQCD（量子色力学）で扱います．

2. マイスナー効果とゲージ対称性の破れ

南部先生が超伝導の問題に興味をもって，特に1960年頃にゲージ対称性に関する仕事をされた頃は，超伝導のBCS理論（1957年）が出た数年後です．できたてのホヤホヤのこの理論は，現在ですら，最初に勉強するときは色々奇妙なところがあり，ギョっとさせられます．いわんや当時は，斬新な理論という印象を与えたことは想像に難くありません．超伝導の本質は，ゼロ抵抗というよりは**マイスナー効果**という，超伝導体がもつ完全反磁性（外部磁場を完全に排除する効果）にありますが，この効果は以下で見るように，ゲージ不変性という，どんなゲージ場でも，普通は守ってほしい性質を露に破っているので，奇妙です．現象論的には，BCS理論が出る以前のロンドン方程式というものが既にゲージ不変性を破っています．超伝導を，現象論ではなくミクロに扱う理論がBCS理論ですから，まず知りたいのは，破れたゲージ不変性はこの理論ではどうなるのか，ということで

す．これに関連して，ゴリコフ（1958–59 年）は，ミクロな BCS 理論に，超伝導基底状態からの準粒子というものを記述したボゴリューボフ理論を融合させた上で，超伝導に対するギンツブルグ–ランダウ理論を構成しました．この理論は，一般に，対称性の破れを伴う相転移を扱う現象論です．これでもなお，マイスナー効果とゲージ対称性の関係が良く分からないのですが，南部先生が行ったことは，電磁場のポテンシャルも含めた場の理論を（電荷保存を保証するウォード（Ward）–高橋恒等式というものに注意しながら）構成すると，マイスナー効果もゲージ不変に議論できる，という視点を与えたことです[4]．つまり，超伝導体におけるゲージ不変性は，意外に面倒な議論をしないと分からず，「隠れて」いるというわけです．教科書では，例えば文献 7〜9) が，このあたりをちゃんと紹介しています．これらのいくつかは，（BCS 以降の）超伝導の教科書としては大変初期に属するものですが，それだからこそ，この点を不思議なことと感じて，真剣に論じたのだろうと思われます．

それでは，南部先生の 1960 年の論文の骨子を簡単に見ましょう．まず，超伝導体の基底状態に対するミクロな BCS 理論，およびそれに基づいたボゴリューボフ理論の要は，超伝導体が，電子と正孔を混ぜた状態の集合と見なせる（ハミルトニアンを対角化する）ので，結果としてゲージ対称性を破っているということです．別の言葉では，BCS 状態では，波動関数の位相が確定するという意味でゲージ対称性が破れるのですが，これは（位相と共役な量である）粒子数が不定な状態だから可能となったわけです．普通は不定であるべき位相が確定したために，ゲージ不変性（位相はどのようにとっても構わないという性質）は破れてしまいます．

ロンドン方程式は，超伝導体内の電流 $\boldsymbol{J}$ と，外部からかける磁場 $\boldsymbol{B}$（これをベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ で表します）との関係を与えるものであり，

$$J_i(\boldsymbol{q}) = K_{ij}(\boldsymbol{q})A_j(\boldsymbol{q}),$$

$$K_{ij}(\boldsymbol{q}) = -\frac{e^2}{m}\langle 0|\rho|0\rangle\delta_{ij} + \sum_n \left(\frac{\langle 0|j_i(\boldsymbol{q})|n\rangle\langle n|j_j(-\boldsymbol{q})|0\rangle}{E_n} + \mathrm{h.c.} \right)$$

で与えられます．ここで，$\boldsymbol{q}$ は，フーリエ変換したときの波数，$i, j = 1, ..., 3$ は空間座標軸のラベル，繰り返された添字については和をとり，$(\rho, \boldsymbol{j})$ は電荷密度 ρ と電流密度からなる 4 元ベクトル，$|0\rangle$ は超伝導状態です．問題は，カーネルと言われる K ですが，電流の縦波（ここでは長波長極限 $q \to 0$ を考える）が立つと，集団励起を引き起こすので，上式右辺第二項はゼロではなく，これが第一項とキャンセルします．電流の横波成分については第二項はゼロとなるので，第一項が残り，$\boldsymbol{J} \propto \boldsymbol{A}$ というロンドン方程式となります．この方程式は，ベクトル・ポテンシャルに露わに依っているので，もちろんゲージ不変性（物理量が，任意性をもつベクトル・ポテンシャルの取り方に依存してはいけないという性質）を尊重していません．

系のハミルトニアンとしては BCS 型にとり，普通はボゴリューボフ理論に従い，超伝導を表す平均場も考えて平均場近似をするのですが，ここで注意しなければならないのは，このような平均場がゼロでないという近似をすると，ゲージ不変性を破ってしまいます．つまり，ボゴリューボフ準粒子は電子と正孔の混ざったものなので，不用意なことをすると電荷保存則は容易に破れます．南部理論はこれを常に注意しながら行い（かつ，電子・フォノン系まで考え，これらの自己エネルギーまでゲージ不変に扱って）定式化すると，すべてゲージ不変にできる，ということを示したのでした．

南部先生が対称性の自発的破れについて示したのは，ゲージ対称性を自発的に破った状態では，これを，いわば部分的に解消するために，**南部・ゴールドストーンモード**という集団励起モードが立つ（破れていない方向に少し近づくためにある種の波が立つ），ということです．このモードは，ゼロ質量の（長波長極限 $q \to 0$ で励起エネルギー

が0となる）モードです．ただし，これは電荷をもっていない粒子の超伝導状態，つまり超流動体における話であり，現実の超伝導体は，電子という，負電荷をもった粒子の集合です．この場合には，励起エネルギーにギャップが開くようになります．これは大まかに言うと，次のようなことです．自発的に破れた対称性が，ゲージ変換のように局所的な変換（例えば，場所 $\boldsymbol{r}$ の関数 Λ を用いた変換 $\psi \to \psi e^{i\Lambda(\boldsymbol{r})}$）に対する対称性の場合は，南部・ゴールドストーン定理が成り立つ必要はなく，有限質量のモードが立つことが可能となります．この現象を**アンダーソン・ヒッグス機構**と呼び，このモード（縦モード）はヒッグス・モードと呼ばれます．

最も馴染み深い電子気体の例で言うと，電子の間のクーロン力はゼロ質量のボソンである光子の場が媒介しますが，この系の縦集団励起モードはプラズモンです．プラズモンの分散はゼロから立ち上がるのではなく，有限の値（プラズモン・エネルギー）から立ち上がります．プラズモンは電子のモードのように見えますが，光子と電子は結合していて光子のモードとも言え，光子がアンダーソン・ヒッグス機構によりギャップをもつ励起モードを得た例とも言えます．このヒッグス・モードは，$NbSe_2$ といった典型的な超伝導体で観測されています．

このように，超伝導体では集団励起モードが立ちますが，いずれにせよこれは超伝導の本質であるBCS状態という，一種のボース・アインシュタイン凝縮体の位相が波立つモードであり，位相モードと呼ばれています．一般に，固体の電子は，バンド構造と呼ばれる分散関係（エネルギーと波数の関係）をもち，何枚ものバンドからなります．超伝導は，このうち一枚のバンドのみが関与して起きる場合もありますが，一般には複数のバンドが超伝導に寄与することもあります．我が国で発見された，MgB_2 という有名な超伝導体が典型例です．この場合，多バンドに亘りゲージ対称性が破れるという点で面白いわけですが，位相モードにも面白いことが起き，複数の位相モードが生じることが知られていて，一本目は二種類ある超伝導成分が同位相で振動する波，二本目は二種類の超伝導成分が互いに逆向きに振動する有限質量の波です．これはレゲット（2003年にノーベル物理学賞）が1960年代に日本に滞在中にした仕事です[10]．**レゲットモード**は，MgB_2 において検証実験も行われています．バンドの数が3（あるいはそれ以上）の場合の超伝導体では，複数個のバンド間ジョセフソン電流が存在するため，これらの電流が強め合う場合と相殺する場合が存在し，このような集団励起が多バンド超流動/超伝導を特徴付けるという示唆があります[11]．最近一大フィーバーになっている，鉄系新超伝導体[12]も，5バンド系で，そのうち3本が超伝導に関与していると考えられています[13]．

冷却原子系でも複数の種類の粒子の凝縮が考えられています．カラー超伝導では，後述するように異なる種類（フレーバー）を持つクォークが複数の凝縮を引き起こします．

3. 強い相互作用における自発的対称性の破れ

次にハドロン系に移りましょう．1961年に発表された南部・ヨナラシニオの古典的論文[14]では，超伝導のBCS理論におけるゲージ対称性と強い相互作用におけるカイラル対称性の類似性をもとに，素粒子の質量生成機構が提唱されています．それでは，この**カイラル対称性**とは何でしょうか．強い相互作用の基礎理論である量子色力学（QCD）で3種類のクォーク (u, d, s) の質量を無視すると，$\mathcal{G} = SU(3)_{\mathrm{C}} \otimes SU(3)_{\mathrm{L}} \otimes SU(3)_{\mathrm{R}} \otimes U(1)_{\mathrm{B}}$ なる対称性が現れます．ここで，$SU(3)_{\mathrm{C}}$ はカラーゲージ対称性，$SU(3)_{\mathrm{L}}$ と $SU(3)_{\mathrm{R}}$ はそれぞれ左巻きクォーク q_{L} と右巻きクォーク q_{R} を独立に回転させるカイラル対称性，$U(1)_{\mathrm{B}}$ はバリオン数保存に関係する対称性です．

さて，クォークの化学ポテンシャルが小さい場合のQCD真空状態では，$\mathcal{G}$ の一部である $SU(3)_{\mathrm{C}} \otimes SU(3)_{\mathrm{L+R}} \otimes U(1)_{\mathrm{B}}$ のみが対称性として残ってい

ます（L+R は，$q_{\rm L}$ と $q_{\rm R}$ を同位相で回転させる対称性です）．これがカイラル対称性の自発的破れです．このときには，真空中にクォーク–反クォーク・ペアの凝縮が起こります．一方，中性子星の中心部のようにクォークの化学ポテンシャルが大きい場合には，$\mathcal{G}$ の一部である $SU(3)_{\rm C+L+R}$（カラーゲージ対称性とカイラル対称性が絡み合った部分群）が対称性として残ります．このときには，異なるフレーバー（u, d, s）とカラー（r, b, g）を持ったクォーク–クォーク・ペアの凝縮が起こります．

物性物理においては，電子間相互作用の効果（例えば超伝導への転移）は，解析的手法や量子モンテカルロ法，動的平均場理論，密度行列繰り込み群法といった数値的手法を用いて調べられています．QCD においては，格子 QCD 計算と呼ばれる強力な第一原理的手法がありますが，クォークの化学ポテンシャルが大きい高密度領域では，負符号問題と呼ばれる困難のために適用できません．従って，QCD の低エネルギー有効理論としての南部・ヨナラシニオ模型の有用性は超伝導における BCS 模型と同様にいまだ衰えを知りません[15]．

さて，固体の超伝導状態においては，電子の準粒子（ボゴリューボフ）スペクトルにギャップが生じます．この準粒子ギャップとディラック粒子の質量ギャップの類似に着目することで，南部先生はフェルミオン質量の動的生成の概念に到達したわけです[14]．ここで，相対論的なスピン 1/2 のフェルミ粒子が従う一般の分散関係を考えてみましょう．フェルミオンを表すスピノル場 $\psi(x)$ とそれを荷電共役変換した場 $\psi^C(x)$ を一つにまとめて，$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \psi \\ \psi^C \end{pmatrix}$ という 2 成分フェルミオン場を導入すると便利です（これは南部・ゴリコフ表示と呼ばれます[4]）．このフェルミオン場が化学ポテンシャル μ を持つ場合の運動項の一般形は，

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\begin{pmatrix} i\partial\!\!\!/ + \mu\gamma_0 - M & \Delta\gamma_5 \\ -\Delta^*\gamma_5 & i\partial\!\!\!/ - \mu\gamma_0 - M \end{pmatrix}\Psi$$

のように表せます．ここで，γ はガンマ行列です．M と Δ をそれぞれディラック質量とマヨラナ質量と解釈することができます．特に，フェルミオン間相互作用の結果 M や Δ が自発的に生成される場合があります．このとき，$\mathcal{L}$ を対角化して得られる準粒子エネルギーは，

$$\omega_{\mp}(\boldsymbol{p}) = \left[(\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2} \mp \mu)^2 + |\Delta|^2\right]^{1/2}$$

となります．ω_- と ω_+ は，それぞれ粒子と反粒子のスペクトルです．QCD 真空中のクォーク準粒子は，$M \neq 0$ かつ $\Delta = 0$，高密度クォーク物質中のクォーク準粒子は $M = 0$ かつ $\Delta \neq 0$ という状況に対応し，後者ではフェルミ面にギャップ Δ が現れます．

4. 物性における超伝導とハドロン系におけるカラー超伝導

最後に，物性における超伝導とハドロン系におけるカラー超伝導を比べて，両者の似ている点と違う点を概観してみましょう．

それには，まず相図を見てみましょう．図 1 (a) には，固体における**銅酸化物高温超伝導体**の有名な相図を掲げてあります．横軸は，ホール濃度（フェルミオン密度）で，今の場合は，酸化物（元々は絶縁体であり，反強磁性体）に，別の元素を混ぜることにより電子数を変えた（実際には，電子を抜くので，正孔の密度を増やす）場合の正孔の密度です．縦軸は温度で，フェルミオン密度を増やすにつれ，反強磁性が消え，その後，超伝導転移温度 T_C が上昇する様子が描かれています．

一方，QCD の相図一例が図 1 (b) です．この場合，横軸はクォーク化学ポテンシャル μ であり（μ が大きいほどクォークの密度が増える），縦軸は温度です．QCD における特徴的な 3 つの相は，低温低密度でのハドロン相，高温でのクォーク・グルーオン・プラズマ相，低温高密度での**カラー超伝導相**です．ハドロン相では，クォーク–反クォーク・ペアの凝縮が発現し，クォークはディラック型の質量 M を獲得します．一方で，カラー超伝導相では，クォーク–クォーク・ペアの凝縮が発現し，クォークはマヨラナ型の質量 Δ を獲得します．

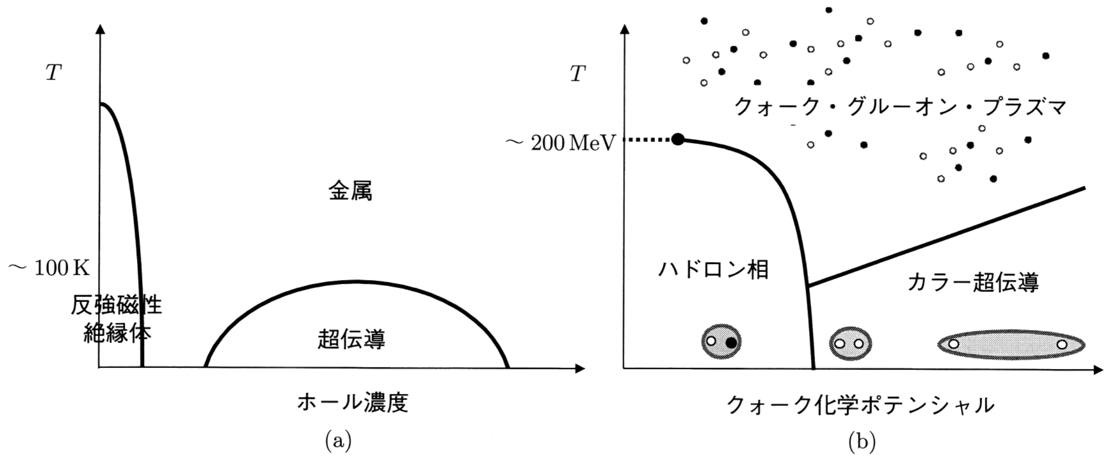


図 1　高温超伝導体の相図 (a) と，QCD の相図 (b).

このように，固体における超伝導も，QCD における超伝導も，系を規定するパラメータ（電子密度や，クォークの化学ポテンシャル）を変えるに従い，様々な相が（場合によっては隣接して）現れます．多体系において様々な相，特にゲージ対称性の破れた状態が現れることは，一般に量子多体系に特徴的なことですが，その現れ方は考える系により違います．物性における相図（図 1 (a)）は，高温超伝導発見から 20 年以上経った今でも，まだ完全には理解されていませんが，基本的には，電子間の斥力相互作用から生じる超伝導であると考えられています．斥力からクーパーペアが生じるというと，直感に反するように思われるかもしれませんが，実は，斥力からも超伝導は十分発生し得て，この場合クーパーペアを糊付けするのは，スピン揺らぎです．引力相互作用の場合との唯一の違いは，斥力相互作用からは異方的（クーパーペアをなす 2 電子の相対角運動量がゼロではない）ペアが凝縮した超伝導が発生する，ということです．実際，高温超伝導体は相対角運動量が 2 という（d 波と呼ばれる）超伝導であることが，実験・理論的に確立しています．ただし，斥力から超伝導を発生させる代償として，超伝導の T_C は，電子のもつ運動エネルギー・スケールである 1 eV（温度に換算して 1 万度）から 2 桁も落ちた，絶対温度 100 K 程度となります．なぜ 2 桁落ちるか，という点については，色々調べられています[5]．

一方，カラー超伝導では，クォークは，グルーオンというゲージ粒子による引力のために，主として等方的な（相対角運動量がゼロの）s 波クーパーペアを組みます[6]．

固体における超伝導とカラー超伝導は，関与するエネルギー・スケールが桁違いである（例えば，カラー超伝導の T_C は 100 MeV 程度（温度に換算して 1 兆度））ということを別としても，様々な違いがあります：

(i)　固体では，クーパーペアを形成するのは非相対論的な電子であり，かつバンド構造を反映して一般にはフェルミ面は丸くはないが，クォーク物質でクーパーペアを形成するのは相対論的なクォークであり，かつ一様等方なフェルミ液体の構造を反映して主として丸いフェルミ面を持つ．

(ii)　クォークのクーパー・ペアは，グルーオンの磁気的相互作用がもたらす強い長距離引力により形成される．その結果，相転移温度 T_C とフェルミエネルギー ε_F の比が $T_C/\varepsilon_F \sim 0.1$ に達し，物性の高温超伝導における，$T_C/\varepsilon_F \sim 0.01$ に比べて 1 桁高い．

(iii)　クォークのクーパー・ペアは，クォークの持つカラー，フレーバー，スピンの組合せに対応して，様々な内部状態をとる．例えば，カラー

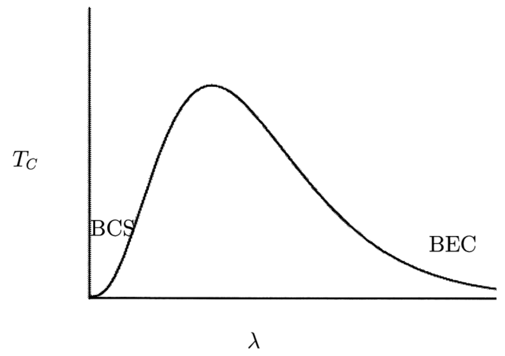


図 2　相転移温度と結合定数 λ の関係.

とフレーバーが絡み合ったカラー・フレーバー・ロッキング状態はその典型例です.

(iv)　クォークのクーパー・ペアと結合したグルーオンの熱揺らぎにより, 相転移次数が一次になる.

上記の (iii) の点については, 固体においても, 電子はスピンをもつので, スピン・トリプレット超伝導や, 強磁性と超伝導の共存, などのスピンが絡んだ面白い現象があります. また, 2 節で多バンド超伝導について触れましたが, 固体でも多軌道系 (例えば鉄系超伝導体) では, いわば多種フェルミオン系になっているので, 軌道自由度という内部自由度をもつ超伝導も存在します. ただし, もちろん, その様子は, カラー, フレーバーに対するものとは異なるラグランジアンに支配されます.

(iv) の点については, 物性における超伝導転移も, 普通は, 対称性の破れを伴う 2 次相転移と考え, ギンツブルグ–ランダウ理論を適用するのが教科書的です. しかし, 厳密には, 電磁場の揺らぎまで考えて, それを繰り込むと, 超伝導転移も (弱い) 1 次転移になるという理論が既に 1974 年にハルペリン (Halperin) 等により示されているので[16], 2 次転移かどうかということは自明ではありません.

最後に, 超伝導が粒子場の結合定数にどのように依存するかを見てみましょう. 図 2 で, 横軸は結合定数 λ であり, 物性の超伝導の場合でいえば, 例えば電子間の引力相互作用の大きさ U, ハドロン物理でいえば, QCD の微細構造定数 α_s (ただし, これはクォーク化学ポテンシャルの関数) です. 縦軸は超伝導の T_C を概念的に描いています. 結合が弱い場合は, クーパーペアの空間的サイズは大きく, BCS 理論が成立し, $T_C \sim \exp(-\mathrm{const}/\lambda)$ のように低い T_C となります. 一方, 強結合ではまず 2 粒子が束縛されて (クーパー・ペアの空間的サイズは小さい), これがボース・アインシュタイン凝縮するという描像になるので, λ が大きい極限では, 一般には自由ボソンの凝縮に対する相転移温度に近づきます (図の引力ハバード模型では, ある事情のために T_C は $T_C \sim 1/U$ のようになりますが). この両極限の間の移り変わりが, いわゆる **BCS–BEC クロスオーバー**となり, 冷却原子系ではこの中間にユニタリ極限という面白い点が存在します.

5. おわりに

超伝導が発現する現実の系として, 物性における電子の超伝導体は膨大な数が知られており, 最近でも, 無機物だけでなく有機物も含んで, 新超伝導体の発見が毎年のように相次いでいます. また, 最近稼働を始めた東海村の大強度陽子加速器施設 J-PARC では, 強力な中性子源を用いて固体の中の励起スペクトルがいままでにないほどの精度と早さで求められ, これは高温超伝導体の理解も飛躍的に高めると期待されています. 一方, QCD のカラー超伝導を実現している可能性があるのは, 中性子星の中心部のような低温・高バリオン密度の環境です. 半径 10–20 km で太陽の 1–2 倍の質量を持つ中性子星は, すでに 1000 個以上見つかっており, 銀河系内だけでも 10^8–10^9 個の中性子星が存在すると予想されています. 最近では中性子星の表面で起こる X 線バーストの情報から, かなり高い精度で高密度物質の状態方程式が推定できる可能性が指摘されています[17]. 南部先生により一般化され深化された “超伝導” の概念は, 物性物理においてもハドロン物理学においても, 新たな現代的展開を生み続けているのです.

参考文献

1) 青木秀夫：日本物理学会誌，**64**, 80 (2009).
2) 青木秀夫：原子核研究 **53**, Suppl. **3**, 183 (2009).
3) 初田哲男，原子核研究 **53**, Suppl. **3**, 5 (2009).
4) Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117**, 648 (1960).
5) 青木秀夫：「超伝導入門」（裳華房，2009）.
6) K. Fukushima and T. Hatsuda, arXiv:1005.4814 [hep-ph].
7) J.R. Schrieffer, *Theory of superconductivity* (Benjamin, 1964).
8) G. Rickayzen, *Theory of superconductivity* (Interscience, 1965).
9) I.J.R. Aitchison and A.J.G. Hey: *Gauge theories in particle physics*, 2nd ed (Inst. Phys. Publication, 1989).
10) A.J. Leggett, *Prog. Theor. Phys.* **36**, 901 (1966).
11) Y. Ota, M. Machida, T. Koyama and H. Aoki, to be published.
12) Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano, and H. Hosono, *J. Am. Chem. Soc.* **130**, 3296 (2008).
13) K. Kuroki, S. Onari, R. Arita, H. Usui, Y. Tanaka, H. Kontani, and H. Aoki, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 087004 (2008); **102**, 109902(E) (2009); K. Kuroki, H. Usui, S. Onari, R. Arita, and H. Aoki, *Phys. Rev. B* **79**, 224511 (2009).
14) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961); *ibid* **124**, 246 (1961).
15) T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Rept.* **247**, 221 (1994).
16) B.I. Halperin *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 292 (1974); H. Kleinert, *Cond. Matter Phys.* **8**, 75 (2005).
17) F. Ozel, G. Baym and T. Guver, arXiv:1002.3153 [astro-ph.HE].

（あおき・ひでお，東京大学大学院理学系研究科）
（はつだ・てつお，東京大学大学院理学系研究科）

イジング模型の論文

統計力学への興味



西森　秀稔

1. 最初の“成功”

まず，南部先生ご自身が物理学会誌に書かれた言葉から始めよう[1].

「Ising 模型の有名な Onsager 解はその頃の大きなトピックで，久保亮五さんを指導者とする物性論グループがつついていたが，私もそれにとりつかれたあげく，簡単な代数的解法を見つけたのが私の最初の“成功”であった．これは 1947 年の春頃だったとおもうが …」

26 歳の春である．南部先生の研究の原点は，**イジング模型**にあるということになる．話に出てくる久保先生は南部先生の一歳年上で，当時弱冠 27 歳の東大助教授であった．この約 3 年後に論文が出版される．当初は出版に値するとは考えなかったが，伏見康治先生の薦めにより論文を書かれたとのことである．当時の雰囲気をもう少し味わうため，物理学会誌の記事からの引用を続けよう（カッコ内は筆者による注釈）.

「教授からわれわれに至るまでの第一の関心事は如何にして毎日食べて行くかということで，研究の方は自然放任の状態であった．…この点東大理学部 1 号館の 305 号室で自炊生活をしたのは理想的だったといえる．同僚の助手，嘱託の連中がいくつかの部屋を占領して机を並べ，夜でもとなりの部屋の住人を訪ねて議論することが出来た．…謹厳な彼（木庭二郎先生）は毎朝誰よりも早く出勤してくるので，机をベッドにしていた私はいつも恐縮した.」

現在では想像もつかないが，住宅難のために若い人たちが研究室を住居として，近隣の研究室に住み着いた人たちと日夜議論をしていたのである．そのような環境で物性論のグループから受けた影響が，イジング模型の論文のみならず，のちの南部先生の業績の礎となっていった．すっかり豊かになった今の私たちが得たものと失ったものについて考えさせられてしまうエピソードである.

2. イジング模型

さて，南部論文[2] ‘A Note on the Eigenvalue Problem in Crystal Statistics’ を理解する出発点として，イジング模型にあまりなじみのない読者も想定してこの模型の歴史を簡単に振り返ってみよう.

イジング模型はもともと強磁性発現の模型としてレンツがその原型を考案し，レンツの弟子イジングが 1 次元の場合に解を求めた[3]．式で書けば，ハミルトニアンが

$$H=-J\sum_{\langle ij\rangle}S_iS_j \qquad (1)$$

と与えられる多体系を平衡統計力学で解析し，強磁性と常磁性の間の相転移を説明せよという問題

である．i や j は格子点，$\langle ij \rangle$ は格子上の隣接点の対，S_i は i にあるイジングスピン（$S_i = \pm 1$），J は相互作用の強さである．β を逆温度 $1/k_B T$（k_B はボルツマン定数）として，分配関数

$$Z = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \cdots \sum_{S_N=\pm 1} e^{-\beta H} \qquad (2)$$

を求め，1 スピンあたりの自由エネルギー $F(T) = -(k_B T \log Z)/N$ の熱力学的極限 $N \to \infty$ を評価することにより，$F(T)$ の $T > 0$ での特異性を明らかにせよということである．イジングは，格子点が線上に並ぶ 1 次元の場合に Z を具体的に計算し，$F(T)$ に特異性（相転移）がないことを示した[3]．彼は誤って，同じ結論が現実的な物質に対応する 3 次元系にも適用できると述べ，強磁性相転移は説明できないとした．

1920 年代から 30 年代にかけて量子力学が確立し，古典変数だけのイジング模型は量子力学と相容れないとして，強磁性の模型としては取り上げられることはあまりなかった．イジングが 3 次元でも相転移がないと言ったことも負の影響を与えた．しかしながら一部の人たちは，表面吸着や格子気体などの相転移・臨界現象一般の模型として地道な研究を続けていた．こうして，2 次元での相転移の存在や転移点（特異点）の厳密な位置などが次第に確立されていった．これらの成果が，次に述べるオンサーガー解の下地を作っていったのである．このような地道な努力がなければ，オンサーガー解に続く 1950 年代から 70 年代にかけての**スケーリング・くりこみ群理論**の大発展や，80 年代以後の境界領域への華々しい展開などはなかったかもしれない．

3. オンサーガー解

そして，1944 年に激震がやってきた．オンサーガーが 2 次元イジング模型を解いて $F(T)$ のコンパクトな表式を求めることに成功し，転移点 T_c で比熱 $C(T)$（$F(T)$ の温度での 2 階微分）が対数発散（$C(T) \propto -\log|T - T_c|$）をすることを証明したのである[4]．オンサーガーの論文は 4 元数代数を駆使した長大かつ難解な代物であった．覚悟を決めて読むと一行一行はそれほど難しくないが，全体像を見通すことがなかなかできないのである．アリになって，広大なジャングルをゴールが見えないままさまよっている気分である．

世界中で多くの俊才たちが**オンサーガー解**に取りつかれ，簡略化や拡張を試みていった．南部先生もそのような時代の雰囲気の中に入って行かれたことは前述の通りである．そしてついに，20 ページ近いオンサーガーの解法をわずか 3 ページに簡約化する別解にたどり着いたのである．オンサーガーは，2 次元格子を一方向に横断する多数の変数の和という大域的な量の代数とその表現を考察したのであるが，南部先生は各格子点とその隣の変数だけを含む局所的な変数の代数に注目したところが大幅な簡略化の要となった．こうして，ヘリコプターに乗ってジャングルを一気に横断することができるようになった．やや遅れてカウフマンも類似の考察に到達しているが，論文の出版はカウフマンが先になった[5]．

4. 南部論文

それでは，南部論文に少し立ち入ってその流れを見てみよう．計算技術に関しては，その後さらに見通しの良い手法が開発されているので[6]，ここでは計算の詳細の解説というよりは，今日の立場から注目すべきエピソードを読み解くことに重点を置くことにする．

4.1 1 次元量子スピン系

短い序説に続く第 2 節では，**1 次元量子ハイゼンベルク模型**と，同じく 1 次元の ***XY* 模型**を考察している．まず，前者のハミルトニアン

$$P = \sum \frac{1 + \sigma_n \cdot \sigma_{n+1}}{2} \qquad (3)$$

にジョルダン・ウィグナー変換を適用して，相互作用するフェルミ粒子系として書き換えられることを示している．表記が現在と少し違うが，P はハミルトニアン演算子，σ_n は格子点 n で定義さ

れた3成分 $(\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz})$ を持つパウリ演算子である．ジョルダン・ウィグナーの論文は1928年だが[7]，南部先生は独立にこの変換を考案されたのだろう．相互作用があるので P の固有値をすべて厳密に求めることはできないが，低温で相互作用の影響が小さいときにはスピン波がよい近似であると述べている．今日の認識と同じである．

次に，1次元 XY 模型

$$P = \sum_{n=1}^{N} (\sigma_{nx}\sigma_{n+1,x} + \sigma_{ny}\sigma_{n+1,y}) \qquad (4)$$

を反交換エルミート演算子 $\{x_n\}$ の2次形式

$$\sigma_{nx}\sigma_{n+1,x} = ix_{2n}x_{2n+1},$$
$$\sigma_{ny}\sigma_{n+1,y} = ix_{2n-1}x_{2n+2}$$

で表現し，並進対称性を使ったフーリエ変換により固有値を求めている．これはとてもモダンな解法である．反交換エルミート演算子への変換も独自に思いつかれたものであろうが，この方法は，現在，2次元イジング模型の最も簡明な解法で用いる考え方に非常に近い[6]．

1次元 XY 模型の厳密解については桂重俊先生の論文が有名であるが[8]，桂論文にも明記されているように，最初に解いたのは南部先生である．このことは意外と知られてないように思われる*1)．ただ，南部論文は書き方がごくあっさりしていて，ハミルトニアンの固有値が原理的にはすべて求められたというところで終わっている（誤植も多いので読むときには注意が必要である）．この点が，もう少し一般化された模型で，ありとあらゆる物理量のパラメータ依存性を徹底的に調べ上げた桂論文との違いである．おそらく，1次元量子 XY 模型を解ける模型として導入してみたものの，それにどれだけ物理的な意義があるか疑問に思って深追いされなかったのではないだろうか．あまりに時代の先を行きすぎていたということだろう．

ちなみに，トムソン・ロイター社のISIのデータによると，本年4月末現在で南部論文[2]の被引用数は44，桂論文[8]は563である．被引用数が論文の重要度に比例するという昨今の風潮は一面では正しいが，被引用数という意味での重要度（影響力）と，研究の源流という意味でのオリジナリティが必ずしも一致しない例と言えよう．トムソン・ロイターが被引用数に基づいて毎年出しているノーベル賞受賞者の予測[9]が，少なくとも物理分野についてはあまり当たらない理由もここに垣間見えている．

4.2 2次元イジング模型

少し話がそれてしまった．次に，いよいよ2次元イジング模型である．この模型の分配関数 Z の計算が **転送行列 $\boldsymbol{H}$** と呼ばれる大きな行列の最大固有値を求める問題に帰着されることは，当時すでに知られていた*2)．転送行列 H は，指数関数の肩に多数のパウリ演算子の和が乗った形の2つの行列 H_1, H_2

$$H_1 = \exp\left(\alpha \sum C_n\right),$$
$$H_2 = \exp\left(\beta \sum S_n\right)$$

の積 $H = H_2 H_1$ と書かれる．これらの和は，実は，1次元量子 XY 模型のハミルトニアンを構成する2つの項（式(4)の右辺の2つの項）に似た形をしている．実際，現在では，量子双対変換[10]を用いて厳密な対応関係が証明できることが分かっている．そこで，南部論文では，1次元 XY 模型のときと同様に，反交換エルミート演算子を用いて S_n と C_n を

$$S_n = ix_{2n}x_{2n+1},$$
$$C_n = ix_{2n-1}x_{2n}$$

と表現した後，これらの行列が反交換エルミート演算子の張る空間の局所的な回転の積として表現できることを利用する．ここでは，$n \neq m$ のとき $[S_n, S_m] = [C_n, C_m] = 0$ と交換することが本質的に重要な役割を果たしている．こうして，H_1 と H_2 は単純な局所回転

*1) 筆者も，南部論文を今回精読するまで知らなかったことを脚注でこっそり告白する．

*2) 現在では H はハミルトニアンに使われる記号だが，ここでは南部論文の記法に従う．

$$\exp(i\theta x_r x_s) = \cos\theta + \sin\theta\, x_r x_s$$

を繰り返すだけの操作として理解できるようになり，並進対称性を使ってフーリエ変換すればたちどころに固有値が求められるのである．大きな次元の行列 H を小さな局所操作行列の積に分解できるところが肝要である．最後の固有値から物理量に至る道筋はすでにオンサーガーが詳しく議論しているので，南部論文では完全に省略されている．

4.3 格子ゲージ理論

これで主要部分は終わった．あとは，いくつかコメント的な話題が提供されている．しかし，この部分にも決して見逃せないオリジナリティが潜んでいる．

最も注目すべきコメントは，3 次元イジング模型についてである．3 次元イジング模型は，今日で言うイジング (Z_2) **格子ゲージ模型**と双対（本質的に等価）であることをほとんど自明のような書きぶりで述べている．格子ゲージ理論をさりげなく導入しているのである．ヴェーグナー[11)]が，多体相互作用を持つ任意次元のイジング模型の双対変換の一般論を展開し，その中で Z_2 格子ゲージ模型が議論されているのが（QCD のコンテクストに限らなければ）格子ゲージ理論の事始めだとコグートのレビューでは紹介されているが[12)]，南部先生はヴェーグナーに二十数年先だって Z_2 格子ゲージ模型を導入していたとも言うことができる．コグートの 2 つ目のレビュー[13)]には，‘…first discovered by Wegner that Ising lattice gauge theory in three dimensions is dual to the ordinary three-dimensional Ising model.’ との記述があるが，これは明らかに誤りである．もちろん，ウィルソン[14)]のような強い相互作用の物理としての動機ではないし，ヴェーグナーのように双対性の概念を徹底して拡張したり大域的な対称性の破れを伴わない相転移の例として研究したのではない．しかしながら，Z_2 格子ゲージ模型を初めて論文中に登場させたのは誰かと言えば，たぶん南部先生なのである[*3)]．論文中には明記されてないが，3 次元イジング模型との双対性（等価性）から，3 次元 Z_2 格子ゲージ模型においては当然相転移があると思われていたことであろう．今の言葉で言えば，ヒッグス相・閉じ込め相の間の相転移である．

あとは，境界条件を変えたときの扱いと代数の構造についてのちょっとしたコメントが記述されている．

*3) たぶんというのは，1950 年以前の他の論文をすべて調べたわけではないからである．

5. おわりに

南部先生のイジング模型の論文を，歴史的な意義を検証しながら紹介した．20 代半ばの気鋭の若者が，食糧難や住宅難に苦しみながらも，研究に関しては何の制約もなく自由にテーマを選んでのめり込んでいった成果が，現在から見ても突出した先進性を持つ論文に結実している．しかも当初は，発表に値しないと思って約 2 年間論文にせず，そのままにしておいたというのである．もったいないと言えばもったいない話であるが，物理的に新しい成果を上げたということがはっきりと納得できてなければ論文にしないという姿勢は，本来の姿なのだろう．論文の内容（質）と言うより数（量）をいつも意識しながら追い立てられるようにして研究を進めざるを得ない現在の私たちから見るとうらやましいようにも見えるが，食糧事情を筆頭として，当時は当時として重大な困難があったことは想像に難くない．

また，これほどの方が統計力学・物性理論の分野で仕事を続けられていたらどんなだっただろうという思いも，この分野の研究者としては禁じ得ない．しかし，冒頭に述べたような物性理論グループとの交流の中でイジング模型についての仕事をしたことが，後の南部理論の開花につながっていったことを思い出すと，分野をまたがった幅広い興味や知識の持ち主にとっては，分野間の壁などはほとんど感じられないのだろう．実際，オンサーガーは非平衡統計力学の相反定理でノーベル化学賞を受賞しているし，ヤンとリーもイジング模型についての極めて有名な仕事を 1950 年代にして

いる[15~17]．本稿が，若い人たちが分野の壁を超えて多彩な興味を持つきっかけとなれば望外の喜びである．

参考文献

1) 南部陽一郎：「素粒子論研究」，日本物理学会誌 **32** (1977) 773.
2) Y. Nambu: *Prog. Theor. Phys.* **5** (1950) 1.
3) E. Ising: *Z. Phys.* **31** (1925) 253.
4) L. Onsager: *Phys. Rev.* **65** (1944) 117.
5) B. Kaufman: *Phys. Rev.* **76** (1949) 1232.
6) 西森秀稔：『相転移・臨界現象の統計物理学』，培風館 (2005).
7) P. Jordan and E. Wigner: *Z. Phys.* **47** (1928) 631.
8) S. Katsura: *Phys. Rev.* **127** (1962) 1508.
9) http://science.thomsonreuters.com/nobel/success-tab/
10) H. Nishimori and G. Ortiz: 'Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena', Oxford University Press (2010).
11) F. Wegner: *J. Math. Phys.* **12** (1971) 2259.
12) J.B. Kogut: *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979) 659.
13) J.B. Kogut: *Rev. Mod. Phys.* **55** (1983) 775.
14) K.G. Wilson: *Phys. Rev. D* **14** (1974) 2455.
15) C.N. Yang: *Phys. Rev.* **85** (1952) 808.
16) C.N. Yang and T.D. Lee: *Phys. Rev.* **87** (1952) 404.
17) T.D. Lee and C.N. Yang: *Phys. Rev.* **87** (1952) 410.

（にしもり・ひでとし，東京工業大学大学院理工学研究科）

質量の起源



小 林　誠

1. 序

体重が気になる人は多いが，ある人の体重が60 kg であると言ったときの kg（キログラム）が質量の単位である．この体重は，その人を構成する原子の質量の総和にほぼ等しい．「ほぼ」と言ったのは，原子どうしを結び付ける束縛エネルギーに相当する質量欠損があるためである．ただし，通常これは無視できる．原子は中心に原子核があり，その周りを電子が取り囲んでおり，原子核はさらに陽子と中性子が強く結合したものである．したがって，原子の質量は，構成要素の素粒子である電子，陽子，中性子の質量の総和にほぼ等しい．この場合，原子核の質量欠損は通常かなり大きい．

本稿で議論する質量の起源とは，これらの素粒子の質量がどのようなメカニズムで生ずるかということである．何をもって質量の起源を理解したと言えるかは議論の余地があるが，ここでは**素粒子の標準模型**と呼ばれるものにおいて，素粒子の質量がどのように理解されているかを中心に解説することにしたい．標準模型では，自然界の基本的な相互作用のうち，重力相互作用を除く 3 種類，すなわち弱い相互作用，電磁相互作用，強い相互作用をゲージ理論と呼ばれる理論形式に基づいて記述している．その際，本特集の主題の一つである**対称性の自発的破れ**が重要な役割を果す．

2. 電子の質量

電子の質量は，原子核の質量欠損に比べても小さいので，体重への寄与という意味では無視できる．しかし標準模型においては，電子と陽子では質量が生ずるメカニズムに重要な違いがあるので，まず電子の質量を考えることから始めよう．

標準模型において，電子の質量は**ヒッグス場**と呼ばれるものとの相互作用から生ずる．数式の助けを借りた説明の前に極めて直観的な説明をしておこう．標準模型においては，真空状態でヒッグス場はゼロでないある値をとる．通常の電磁場のような場合には，場が値を持つとそれに伴って系のエネルギーが増加する．したがってエネルギーの最も低い状態，すなわち真空では場の値がゼロになるのが普通である．しかしヒッグス場では，特殊な相互作用のために，場の値がゼロでないほうがエネルギーが低くなる．このため真空状態で場がゼロでない値を持つこととなる．

このように場あるいは場の積が真空状態で値を持つことは，対称性の自発的破れが起きるときには共通した状況である．ヒッグス場は対称性の自発的に破れた状況を作り出すために人為的に模型に導入された場である．このためヒッグス場の組成についてはある程度の任意性があり，実験的に確かめる必要がある．CERN で稼働を始めた LHC での実験にこの期待がかかっている．

さて電子の質量であるが，ヒッグス場が値を持っ

ている真空に電子を持ち込むことを考えよう．電子が静止しているとすると運動エネルギーはゼロであるが，ヒッグス場との相互作用のエネルギーが発生する．後で式を使って説明するが，電子のもともとの質量はゼロと考えられるので，真空中で静止した電子のエネルギーはヒッグス場との相互作用エネルギーのみで，これが電子の質量として実測されるものとなる．

ここからは少し数式を使って上で述べたことを説明する．標準模型において，弱い相互作用と電磁相互作用は統一的に**ワインバーグ・サラム・グラショウ（以下 WSG）理論**で記述される．この理論は $SU(2)\times U(1)$ の構造を持つゲージ変換に対して不変であることを原理とするゲージ理論である．ゲージ理論の詳しい説明は本稿では割愛する．

WSG 理論では，ヒッグス場は $SU(2)$ ゲージ変換の下で 2 重項として変換を受ける．

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}.$$

ここで，ヒッグス場は相互作用の結果，

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

のような真空期待値を持つと考える．このように，ゲージ変換の下で変化する量が，真空期待値を持つことは真空がゲージ変換に対して不変ではないことを意味しており，ゲージ対称性が自発的に破れた状況を表している．

電子の場はカイラリティの異なる 2 成分の和として表される．

$$\psi_e = \psi_{eL} + \psi_{eR}.$$

ここで

$$\psi_{eL} = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi_e, \quad \psi_{eR} = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi_e$$

である．添え字の $L(R)$ は，運動量が質量に比べて十分に大きいとき（$|p| \gg m_e c$），これらの成分が電子スピンの左（右）巻きヘリシティの状態に対応することを示している．

ゲージ変換の下で，L 成分と R 成分は変換性が異なる．$SU(2)$ 変換に対し，R 成分は不変（1 重項）であるが，L 成分はニュートリノと 2 重項を形成する．

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_{\nu L} \\ \psi_{eL} \end{pmatrix}.$$

この節ではニュートリノの質量やニュートリノ振動は無視する．

ラグランジアンの中で，フェルミ粒子の質量項は

$$-mc^2(\bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R)$$

のように L 成分と R 成分の積の形をとる．ところが電子の L 成分と R 成分は変換性が異なり，質量項はゲージ不変にならないので，WSG 理論では許されない．この節の初めで，電子のもともとの質量はゼロと言ったのはこのことである．

WSG 理論における電子の質量はヒッグス場との相互作用項

$$-\sqrt{2}g_e(\bar{\psi}_{eR}\Phi^\dagger\Psi_L + \bar{\Psi}_L\Phi\psi_{eR})$$

から生じる．ここで Ψ_L と Φ がともに 2 重項であり，その積がゲージ不変になっていることに注意しよう．この相互作用のエネルギーが，ヒッグス場が真空期待値を持つ場合には電子の質量となる．真空期待値 v を使って

$$m_e = g_e v/c^2$$

と表される．

ところで v の大きさは弱い相互作用の大きさから次のように決まる．

$$v = \frac{c\hbar}{2^{1/4}\sqrt{G_F}} \approx 250\,\mathrm{GeV}/\sqrt{c\hbar}$$

ここで G_F は弱い相互作用のフェルミ結合定数である．v は WSG 理論において質量の基本となる量であり，弱い相互作用を媒介する W 粒子や Z 粒子の質量も次のように表される．

$$m_W = \frac{ev}{2c^2\sin\theta_W},$$

$$m_Z = \frac{ev}{2c^2\sin\theta_W\cos\theta_W}.$$

ここで，e は微細構造定数，θ_W は $SU(2)$ 部分と

$U(1)$ 部分のゲージ結合定数の相対的な大きさに関係したパラメータで

$$\sin^2\theta_W \approx 0.23$$

である．

一方，電子の質量は

$$m_e \approx 0.5\,\mathrm{MeV/c^2}$$

であり*1)，v とは大きな違いがある*2)．この違いはヒッグス場と電子の相互作用の強さを表す g_e が極めて小さいことを意味している．WSG 理論においては，g_e の値は理論的に予言することができず，実験値から決めるパラメータである．この意味で，電子の質量の起源を十分に理解しているとは言い難い．

この節で説明した電子の質量が生じるメカニズムは，同じ荷電軽粒子の仲間であるミュー粒子とタウ粒子についても当てはまる．ニュートリノの質量については 4 節で議論する．

3. 陽子・中性子の質量

陽子や中性子はさらに構造を持っており，u, d, 2 種類のクォークの次のような組合せで構成される．

$$\text{陽子} = (uud), \quad \text{中性子} = (udd).$$

陽子，中性子の電荷を正しく再現するには，u-クォークの電荷は単位電荷の $2/3$，d-クォークは $-1/3$ でなければならない．

クォークをつなぎとめて陽子や中性子を作る力は強い相互作用から生じる．標準模型において強い相互作用は QCD 理論で記述される．強い相互作用はその名のとおり，相互作用が強いので，その効果を厳密に計算することは困難である．事実，陽子の質量をクォークレベルから詳しく計算するには，格子ゲージ理論の手法を使って数値的に行うことになる．

ここでは，少々乱暴であるが，原子や原子核の質量を構成要素の質量の総和と考えたのと同じように，陽子や中性子の質量は構成要素である 3 個のクォークの質量の総和にほぼ等しいと考えてみよう．これは原子や原子核の場合と比べると問題のある仮定であるが，定性的に本質を理解するためには有効である．

クォークの質量を陽子や中性子のほぼ $1/3$ とすると，およそ $300\,\mathrm{MeV/c^2}$ となるが，標準模型においてこの質量は 2 種類のメカニズムによって生じると考えられる．一つは電子の場合と同じようにヒッグス場との相互作用によって生じる部分である．クォーク場も電子と同じようにカイラリティによって WSG 理論の $SU(2)$ 群に対する変換性が異なり，u-クォークと d-クォークの L 成分は 2 重項を形成し，R 成分はそれぞれ 1 重項になる．

$$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad u_R, \quad d_R.$$

したがって，クォークの場合も質量項はゲージ不変にならないので存在しない．ヒッグス場との相互作用については次に示す独立な 2 種類がある．

$$-\sqrt{2}g_d(\bar{d}_R\Phi^\dagger q_L + \bar{q}_L\Phi d_R),$$

$$-\sqrt{2}g_u(\bar{u}_R\tilde{\Phi}^\dagger q_L + \bar{q}_L\tilde{\Phi}u_R).$$

ここで，

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^{+*} \end{pmatrix}$$

も 2 重項の変換性を持つことに注意しよう．ヒッグス場が真空期待値を持つと，前者の相互作用からは d-クォークの質量が，後者からは u-クォークの質量が生じることは容易に確かめられる．

ところでこのメカニズムから生じる質量はかなり小さいもので，推定の方法にもよるが，u-クォークで $2\,\mathrm{MeV/c^2}$ 程度，d-クォークで $4\,\mathrm{MeV/c^2}$ 程度と考えられている．したがって，クォークの質量と見積もられる $300\,\mathrm{MeV/c^2}$ のほとんどは強い相互作用から生ずると考えられる．そこで，しばらくの間，ヒッグス場との相互作用や弱い相互作用を無視して，質量項のないクォークが QCD 理論

*1) $1\,\mathrm{eV/c^2} \approx 1.78266 \times 10^{-36}\,\mathrm{kg}$.

*2) 次元の異なる量の大小は，$c = \hbar = 1$ となる自然単位系で考える．

に従って強い相互作用をしている系を考えてみる．

QCD 理論はクォークのカラーの自由度に結合するゲージ理論であり，力を媒介するゲージ場はグルーオンと呼ばれる．グルーオンは 8 種類あり，グルーオンどうしの相互作用がある．この点で，同じゲージ理論で記述される電磁相互作用と大きく異なる．その結果，クォーク閉じ込めなどの特異な性質を持つが，その詳細は省略する．

ここで注目することは，この系の持つ**カイラル対称性**とその自発的破れである．カイラル対称性とはクォーク場のカイラル成分を独立に変換するような変換に対して理論が不変であることである．今の場合，u-クォークと d-クォークの L 成分を 2 重項とする $SU(2)_L$ 変換と R 成分を 2 重項とする $SU(2)_R$ のいずれに対しても理論が不変となっているので，この系は $SU(2)_L \times SU(2)_R$ の不変性を持つ．これがここで考えるカイラル対称性である．

カイラル対称性が成立するためには質量項がないことが本質的に重要である．質量項は L 成分と R 成分の積の形をしているので，それぞれを独立に変換すると不変にならないからである．現実のクォークが質量を持っていることはこの対称性と相いれないように見えるが，これは対称性の自発的破れとして理解される．このことを最初に指摘したのが南部陽一郎先生である．

対称性の自発的破れは WSG 理論にも現れたが，その場合との比較で，ヒッグス場の真空期待値に相当するのは

$$\langle 0|\bar{u}u + \bar{d}d|0\rangle \neq 0$$

である．左辺の量は，質量項と同じように，L 成分と R 成分の積の形をしており，カイラル変換で不変ではない．このような量が真空期待値を持つことは，真空自体がカイラル変換に対して不変ではないことを意味しており，そのような真空の上で起きる現象では見かけ上，対称性が失われることになる．上記の真空期待値が現れるかどうかは，この系に働く力の性質によるものであり，相互作用の効果を評価しなければならないが，これは前述の格子ゲージ理論の手法により，計算機シミュレーションで確かめられている．

ところで南部理論の重要な帰結の一つとして，対称性が自発的に破れたときには，**南部・ゴールドストン粒子**と呼ばれる質量がゼロの粒子が現れることが知られている．今の場合，南部・ゴールドストン粒子にあたるのは π 粒子であるが，現実の π 粒子はゼロでない質量を持つ．

ここで，これまで無視してきたヒッグス場との相互作用から生じる小さな質量の影響を考えなければならない．小さいながらも対称性の自発的破れが起きる前の質量の存在は，カイラル対称性が厳密には成り立っていないことを意味する．したがって，今の場合，カイラル対称性は近似的な対称性となる．その影響で南部・ゴールドストン粒子が厳密にはゼロではなく，小さな質量を持つようになる．現実の π 粒子の質量はこのようなものと考えることができ，定量的にも矛盾がないことが知られている．

結局，陽子や中性子の質量はそのほとんどがカイラル対称性の自発的破れを通じて強い相互作用から生じるのであって，ヒッグス場との相互作用の寄与は小さい．したがって，我々の身の回りの物質の質量もそのほとんどが強い相互作用に由来するものということができる．ヒッグス場がすべての質量の起源であるというような説明をときどき見かけるが，これは正しくはない．

u-クォークと d-クォークの質量の主要部分は強い相互作用から生じることを見てきたが，クォークは全部で 6 種類あることが知られている．u，d の質量をおよそ $300\,\mathrm{MeV/c^2}$ と見積もったのと同じ意味で，その他のクォークの質量はおよそ $m_s \approx 400\,\mathrm{MeV/c^2}$，$m_c \approx 1.5\,\mathrm{GeV/c^2}$，$m_b \approx 4.5\,\mathrm{GeV/c^2}$，$m_t \approx 170\,\mathrm{GeV/c^2}$ 程度と推定される．強い相互作用に由来する質量はクォークの種類に大きくは依存しないと考えられるので，これらの質量の違いはヒッグス場との相互作用の強さの違いから生じると考えなければならない．とくに c-, b-, t-クォークではヒッグス場からの寄与が強い相互作用の寄与を大きく上回っている．

ところで，強い相互作用から生じる質量の大きさ，すなわちu-クォークの質量とか，陽子の質量の大きさがどのように決まるのであろうか．というのも，質量項の無いQCD理論には基本的なパラメータとしてはゲージ相互作用の強さを表す結合定数一つしかないが，結合定数は無次元の量であって，この理論から質量の大きさが決まるのは一見不思議だからである．これに対する答えを詳しく説明することは本稿の範囲を超えるが，一般に場の理論において，相互作用の強さはエネルギーのスケールともに変化する．したがって，QCD理論の結合定数をパラメータとして与える際にも，どのエネルギースケールでの値かを指定しなければ意味がない．このようにして，結合定数の大きさを通じてエネルギー，したがって質量のスケールが理論に持ちこまれるのである．

ここで注意すべきことは，QCD理論の結合定数を介して現れる質量のスケールと，WSG理論のヒッグス場の期待値を介して現れる質量のスケールは，少なくとも標準模型の枠内では独立な量であることである．陽子の質量などは前者によって決まり，重いクォークや弱い相互作用を媒介するW粒子やZ粒子の質量は後者に関係付けられる．このように独立な質量のスケールが存在し，両者の関係を理論的に予言することができないことは，標準模型の弱点の一つである．

4. ニュートリノの質量

ニュートリノには3種類あることが知られている．ニュートリノに質量があることは，ニュートリノ振動が観測されたことにより明らかとなった．ニュートリノ振動は3種類のニュートリノの間に質量差があると，異なる質量のニュートリノの寄与が干渉し合うことによって起きる現象である．ニュートリノ振動からは，質量の2乗の差の大きさが分かる．個々の質量は，その値が小さすぎて，直接測定することができないが，一番重いものでも$1\mathrm{eV}/c^2$以下であろうと考えられている．

標準模型ではニュートリノの質量はゼロであるとよく言われるが，これは誤解を招く表現である．クォークの場合，u-クォークとd-クォークの任意の質量の値をヒッグス場との相互作用で表すことができたのと同じように，任意のニュートリノの質量をヒッグス場との相互作用で与えることができる．したがって，標準模型の枠組みを大きく変えることなく，任意のニュートリノ質量を記述することはできるのである．ただし，ニュートリノの質量が，一番軽い荷電レプトンである電子に比べて6桁以上も小さいことは説明できない．

ニュートリノの質量の問題を考える上で重要なことは，ニュートリノが電荷をもたないため，マヨラナ質量項が許されることである．マヨラナ質量項は粒子数を保存しない質量項であり，クォークや荷電レプトンでは粒子数の保存と電荷の保存が結びついているため許されない．マヨラナ質量項に対し，通常の粒子数を保存する質量項をディラック質量項と呼ぶ．

詳細は省略するが，マヨラナ質量を許すと，ニュートリノの質量を

$$m_\nu \approx \frac{m^2}{M}$$

のように表すことができる．ここで，右辺のmはディラック質量，Mはマヨラナ質量を表す．このため，Mが非常に大きいと考えると，ディラック質量が他の荷電レプトンの質量と同程度としても，非常に小さいニュートリノの質量が説明できることになる．これは非常に魅力的な考え方であり，ニュートリノの質量には標準模型を超えた，非常に大きなエネルギースケールの物理が関与していることを示唆している．

5. 質量の起源

ここまでの議論ですでにいくつかの質量のスケールが登場した．それらの間には何らかの関係があって，理論的に説明されるべきものであろうか．究極の統一理論ができた暁には，何か基本的な質量のスケールが一つだけあって，すべての質量はそれから導き出せるのであろうか．もちろん，今は

その答えを知らないのであるが，この節では質量のスケールで，ここまでに登場しなかったものをいくつか見ておくことにしたい．

標準模型には3個の独立なゲージ結合定数がある．一つはQCD理論のそれであり，残りの二つはWSG理論の $SU(2)$ の部分と $U(1)$ 部分それぞれの結合定数である．標準模型の範囲内では，これらの間の関係を説明できないが，**大統一理論**と呼ばれるものではこれらが一つの相互作用から派生したものと考える．すなわち，一つの結合定数で規定される大きなゲージ対称性を持つ理論が対称性の自発的破れの結果，標準模型の3種のゲージ相互作用に分裂したと考えることができる．このとき，現実の3種のゲージ相互作用の結合定数の違いは，結合定数のエネルギー依存性によって説明される．しかしこの依存性は緩やかなものであるので，3種の相互作用の強さが等しくなり大統一が起きるエネルギースケールは非常に大きくなる．模型の詳細にもよるが，大統一のエネルギースケールは質量に換算して $10^{16}\,\mathrm{GeV/c^2}$ 程度と考えられている．大統一の考え方が有効だとすれば，これも基本的な質量スケールの一つであろう．

ここまでの議論には重力相互作用は登場していない．しかし質量の起源を考える上で重力相互作用は無視できない．重力相互作用の強さを表す重力定数は次元を持つ量であり，特に重力定数 G_N と光速度，プランク定数の組合せでできる質量の次元を持つ量

$$m_P = \frac{\hbar c}{G_N} \approx 1.2 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV/c^2}$$

は**プランク質量**と呼ばれ，重力相互作用を特徴づける質量のスケールである．超弦理論が示唆するように量子重力の理論がすべての相互作用を包含するようなものとなるならば，このプランク質量が最も基本的な質量のスケールとなる可能性が大きいと思われる．

最後に宇宙論に関係した質量スケールを見ておこう．最近の観測結果はダークエネルギーと呼ばれる，宇宙空間に一様に広がったエネルギーの存在を強く示唆している．このエネルギー密度を質量のスケールに換算してみると $3 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV/c^2}$ 程度という極めて小さい値になる．ダークエネルギーの正体は未だ不明であり，この値がどのような意味を持つかもわかっていない．

以上のように多くの質量のスケールが存在するが，それらの間にどのような関係があるかを我々はまだ知らない．その関係が完全に明らかになったとき，真の意味で質量の起源が分かったと言えるのであろう．

（こばやし・まこと，高エネルギー加速器研究機構特別栄誉教授）

カイラル対称性の破れとクォーク閉じ込め

「真空」の物性理論の展開



国広 悌二

1. はじめに：南部先生による真空/物質描象の変革

南部先生のノーベル賞受賞の対象となったお仕事[1,2]の意義は深く多岐に亘ります．まず，質量の起源の問題を提起し，その生成の機構を金属の超伝導の理論[4]にヒントを得て[5] 初めて明らかにされました．そして同時に，日本人として初めてノーベル賞を授賞した湯川秀樹博士の予言した中間子（パイ中間子）の特異な性質，すなわち，他のハドロンに比べて非常に軽い，あるいはまた，それを記述する「場」が擬スカラー性を持つ，等の一連の性質が質量生成の必然的帰結として説明できることを明らかにしました．そこで提起された普遍的概念が（真空における）対称性の自発的破れ*1) というものです．

そして大きく見れば，先生のお仕事は「真空」というものが空っぽのものではなくむしろ超伝導や磁気相転移を示す固体などと同様に大変豊かな物質性を持つという，現在では確立した真空と物質の新しい見方を初めて説得的に提示したものと言えます．もちろんディラックの「空孔理論」がそのような見方の基礎にあることは確かですが，「対称性の自発的破れ」の概念の発見がそれをより明示的にしました．この真空の物質性と物質に対する新しい見方は，場の量子論に基づく現在の物理学の考え方の普遍的な基礎となっており，物質階層を貫く普遍的な性格のものです[6]．

この解説では，まず質量のダイナミカルな起源がなぜ「カイラル対称性の自発的破れ」として理解されるのかについて，南部理論に即して，しかし，学部学生にも分かるようできるだけ初等的に説明します．次に，「強い相互作用」の基礎理論である量子色力学（Quantum chromodynamics: QCD）における真空構造，特に，カイラル対称性の自発的破れとクォーク・グルーオンの閉じこめ問題について南部先生の寄与に言及しつつ最近の発展について簡単に紹介します．最後にクォーク・ハドロン多体系が示す超高温・高密度での物性について，南部先生のお仕事から学んで行った私のささやかな研究の紹介をさせていただきます．

2. 真空の超伝導模型

ディラック粒子のダイナミカルな質量の創生とカイラル対称性の自発的破れの関係を理解するにはそれを最初に示された南部先生による模型[1,2]で考察するのが最も分かりやすくかつ教育的です[7,8]．

2.1 ディラック方程式の新しい見方

スピン 1/2 の質量 M を持つ粒子を記述する相対論的な方程式は次のディラック方程式です[9]：$(i\gamma\cdot\partial - M)\psi = 0$．ここで現れたガンマ行列 γ^μ には様々の表現があります．通常はハミルトニアンの質量項 $\psi^\dagger\gamma^0 M\psi$ を重視して γ^0 が対角形に

*1）質量の起源で関係する対称性は質量のないフェルミオンに関係したカイラル対称性と呼ばれるものです．

なる表現を使います．一方，$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ を対角形に取る表示（**ワイル表示**と呼びます）を使うこともできます（γ_5 の固有値 ±1 を**カイラリティ**と呼びます）．この表示では，ディラック方程式は次の連立方程式になります：

$$E\psi_R = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,\psi_R + M\psi_L,\qquad E\psi_L = -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,\psi_L + M\psi_R. \tag{2.1}$$

ここで，2 成分スピノル $\psi_{R(L)}$ を用いて $\psi = {}^t(\psi_R, \psi_L) \sim \exp(-iEt + i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})$ と表しました．

エネルギー固有値は $E = \pm\sqrt{p^2 + M^2} \equiv \pm E_p$ となります．特に $M = 0$ のときを考えると，カイラリティの固有状態 $\psi_{R,L}$ がエネルギーの固有状態になっています．実際，このときのラグランジアン密度は位相変換 $\psi \to \mathrm{e}^{i\alpha/2}\psi$ だけでなく，次の**カイラル変換**に対して不変になっています：$\psi \to \mathrm{e}^{i\gamma_5\beta/2}\psi$．そして正エネルギー解 $(E = |\boldsymbol{p}| \equiv p)$ では $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/p)\psi_{R(L)} = \pm\psi_{R(L)}$ となります*2)．ここで，$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}/p \equiv h$ はスピンの運動量方向の成分を与える演算子でヘリシティと呼ばれます：$h = 1\,(-1)$ のとき，スピンの回転軸は運動量の方向に平行（反平行）であり，「右巻き；right handed」（「左巻き；left handed」）の状態と呼ばれます．$M = 0$ のときには，カイラリティとヘリシティが一致することに注意してください．質量 $M \neq 0$ のときには，エネルギーの固有状態はカイラリティ ±1 の状態が混合し，もはやカイラリティのよい固有状態ではなくなります．ただし，この場合もヘリシティで状態を指定することができます．

ワイル表示で書いたディラック方程式が超伝導中の電子（とフェルミ球内のホール）を記述する方程式が同じ構造をしていることの認識が南部理論[1,2]の出発点です．超伝導体状態の金属中のフェルミ面付近の電子的な素励起は次の方程式で記述されます：

$$E\psi^{(e)}_{\boldsymbol{p}\uparrow} = \epsilon_p\psi^{(e)}_{\boldsymbol{p}\uparrow} + \Delta\psi^{(e)\dagger}{}_{-\boldsymbol{p}\downarrow},\qquad E\psi^{(e)\dagger}{}_{-\boldsymbol{p}\downarrow} = -\epsilon_p\psi^{(e)\dagger}{}_{-\boldsymbol{p}\downarrow} + \Delta^*\psi^{(e)}_{\boldsymbol{p}\uparrow}. \tag{2.2}$$

*2)　ここで，$P_{R(L)} \equiv (1 \pm \gamma_5)/2$ をカイラリティ ±1 の状態への射影演算子として，$P_R\psi = {}^t(\psi_R, 0)$ と ψ_R を同定しました．$P_L\psi = {}^t(0, \psi_L)$ についても同じです．

ここで，ϵ_p はフェルミ面から計った電子のエネルギーであり，$\Delta \propto \langle\psi^{(e)}_\uparrow\psi^{(e)}_\downarrow\rangle$. (2.1) と (2.2) を比べると，ギャップ Δ がディラック粒子の質量 M に対応していることが分かります．

超伝導体ではギャップ Δ のために電子状態とホール状態が混合し，その結果レベル反発が起きて電子の分散関係に 2Δ のギャップが生まれています．ディラック粒子の場合は，質量 M のために異なるカイラリティが混合しています．それでは，カイラル変換に対して不変な理論から出発して，BCS 理論のように質量を相互作用の効果としてダイナミカルに生成する理論を構築することができるでしょうか？ そのとき，超伝導の対応関係から $M \propto \langle\bar{\psi}_R\psi_L\rangle$ となるはずです．それを具体的に行ったのが南部理論[1,2]です．

2.2 ラグランジアン

以下では，ディラック場で記述される粒子をクォークと呼び，ψ の代わりに q と書くことにします．

カイラル不変性を破るディラック場の質量項 $\bar{q}q \equiv S$ はカイラル変換に対して $\bar{q}q \to \bar{q}\mathrm{e}^{i\gamma_5\beta}q = \cos\beta\,\bar{q}q + \sin\beta\,\bar{q}i\gamma_5 q$ と変換されます．一方，ここに現れた擬スカラー項は次のように変換されます：$\bar{q}i\gamma_5 q \equiv P \to -\sin\beta\,\bar{q}q + \cos\beta\,\bar{q}i\gamma_5 q$. したがって，ベクトルの大きさ (S, P) の 2 乗 $(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 q)^2$ はカイラル変換に対して不変です．このようにして，相互作用項を持つカイラル不変な最も簡単なラグランジアンとして次の南部–ヨナ-ラシニオ（NJL）模型[1,2]に行き着きます：

$$\mathcal{L} = \bar{q}i\gamma\cdot\partial q + g[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 q)^2]. \tag{2.3}$$

クォークと反クォークの間には引力 $-g$ が働いています：$g > 0$. この模型はくりこみ可能ではなく，有効模型としてカットオフ Λ を持ちます．ワイル表示を用いるとラグランジアンの相互作用項は $\mathcal{L}_1 = 4g\Phi^\dagger\Phi$ と書けることを注意しておきます．ただし，$\Phi \equiv \bar{q}_R q_L = 1/2\cdot(S + iP)$; $\bar{q}_L q_R = \Phi^\dagger$.

2.3 真空の決定：無限に縮退した真空

金属の超伝導体との対応から，凝縮体 $\langle\bar{q}_R q_L\rangle = \langle\Phi\rangle$ および $\langle\Phi\rangle^*$ が存在する真空が実現するかど

うかが問題になります．超伝導の BCS 理論にならって，自己無撞着平均場近似で (2.3) の真空（基底状態）を決定してみましょう．$|\ \rangle$ をこの理論の真空状態とし，$-4g\langle \Phi \rangle = G(\sigma + i\pi)$ と書くことにします．ここに，$-2g\langle \bar{q}q \rangle = G\sigma$，$-2g\langle \bar{q}i\gamma_5 q \rangle = G\pi$．平均場近似したラグランジアンは，$\mathcal{L}_{\mathrm{MFA}} = \bar{q}[i\gamma \cdot \partial - G(\sigma + i\pi\gamma_5)]q - \frac{m_0^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2)$，となります．ただし，$2g = (G/m_0)^2$ と置きました．最後の c 数の項は相互作用の 2 重の数え上げを避ける項です．$\mathcal{L}_{\mathrm{MFA}}$ から導かれる運動方程式は，$[i\gamma \cdot \partial - G(\sigma + i\pi\gamma_5)]q = 0$ となります．

ここで，$G\sqrt{\sigma^2 + \pi^2} = M$，$\pi/\sigma = \tan\theta$ と M と θ を定義し $q_\theta = \mathrm{e}^{i\gamma_5\theta/2}q$ と書くと，q_θ に対する方程式は質量 M を持つ相対論的粒子に対する通常のディラック方程式になります：$(i\gamma \cdot \partial - M)q_\theta = 0$．我々はこの方程式の答えを既に知っています．

$\mathcal{L}_{\mathrm{MFA}}$ に対応するハミルトニアンを H_{MFA} と書くことにします．系の真空のエネルギーは H_{MFA} の真空期待値によって与えられます：

$$\frac{\langle H_{\mathrm{MFA}} \rangle}{V} = \frac{2}{V} \cdot \sum_{\boldsymbol{p}} (-E_p) + \frac{m_0^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2). \tag{2.4}$$

これは，ディラックの海による寄与と相互作用の 2 重数え上げを避ける斥力的な c 数項からなっています．重要なことは，エネルギーが $\sigma^2 + \pi^2 = M^2/G^2$ の組合せのみに依存し，角度 θ に依存しない，ということです．これは，真空が連続無限に縮退していることを意味し，π 方向の回転モード，すなわち，擬スカラーのゼロ質量モードが出現する原因となります．この様子を図示したのが図 1 です．ここでは，(2.4) から $M = 0$ のときの真空のエネルギーを差し引いたものを $\mathcal{V}(\sigma, \pi)$ と書いて図示しています．

$\mathcal{V}$ を M の関数とみたとき，その停留点は $d\mathcal{V}/dM = 0$ の解として与えられます．一般性を失わないので $\theta = 0$ の場合を考えましょう．そのとき，この停留条件は，$M = -2g\,\langle \bar{q}q \rangle$ と等価な式となります．すなわち，自己無撞着に M を決める条件です．この方程式には g の値によらず自明な解 $M = 0$ があります．$g > \pi^2/\Lambda^2 \equiv g_c$ のとき，もう一つの非自明な解 $M = M_0 = G\sigma_0 \neq 0$ が現れます．2 つの解に対応する真空のエネルギーを比較すると，$g > g_c$ のとき非自明解 M_0 に対応するエネルギーの方が低くなりこの状態 $|\sigma_0\rangle$ が真の基底状態，すなわち，真空である，ということになります．

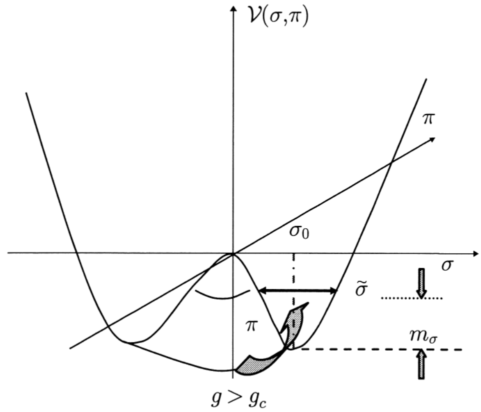


図 1　結合定数が臨界値より大きいときの真空のエネルギーの振舞い．π の方向の回転に対して対称になっている．エネルギーの底にそって π 方向のモードを励起するのにエネルギーが必要ない．

質量有りと質量なしの演算子の真空をそれぞれ $|\sigma_0\rangle$ および $|0\rangle$ と書くことにすると，

$$a_M(\boldsymbol{p}, r)|\sigma_0\rangle = b_M(\boldsymbol{p}, r)|\sigma_0\rangle = 0, \tag{2.5}$$

そして，$a_0(\boldsymbol{p}, r)|0\rangle = b_0(\boldsymbol{p}, r)|0\rangle = 0$ です．ここで，$a_{M(0)}(\boldsymbol{p}, r)$，$b_{M(0)}(\boldsymbol{p}, r)$ はそれぞれ運動量 $\boldsymbol{p}$ とヘリシティ r の質量を持つ（持たない）粒子と反粒子の消滅演算子です．$M = 0$ のときには ヘリシティ ＝ カイラリティ であったことを思い出してください．ここで，両粒子描像に対応する演算子はボゴリウボフ変換で結びついています．そのとき，質量有り演算子 $a_M^\dagger(\boldsymbol{p}, +1)$ を構成する質量なし演算子 $a_0^\dagger(\boldsymbol{p}, r)$ $(b_0(-\boldsymbol{p}, r))$ はカイラリティを $+1$ だけ生成（消滅）させます．一方，$a_0^\dagger(\boldsymbol{p}, r)$ と $b_0(-\boldsymbol{p}, r)$ は両方ともヘリシティを 1 だけ生成します．したがって，$a_M^\dagger(\boldsymbol{p}, +1)$ により生成された状態はヘリシティの固有状態ですが，カイラリ

ティ ±1 の状態が混合していてその固有状態ではありません．したがって，最初の式は新しい真空状態 $|\sigma_0\rangle$ はカイラリティの固有状態になっていないことを示しています．

2.4 励起モード：パイ中間子とシグマ中間子

この新しい真空と整合的な粒子描像を出発点とする全ラグランジアンは次のように書かれます：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{MFA}} + g : [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 q)^2] : . \quad (2.6)$$

ここで，: : は新しい真空に対するノーマル積です．最後の項は，多体問題の理論では「残留相互作用」と呼ばれることもあります．この項は対称性が破れた真空の上における素励起について重要な情報を含んでいます．

実際，擬スカラーチャンネルのクォーク–反クォーク励起モード（パイ中間子）の質量を計算すると，自己無撞着に M（したがって，真空）を決める条件 $M = -2\langle\bar{q}q\rangle$ のために，パイ中間子の質量がゼロになることが示せます．

興味深いことは，パイ中間子がゼロ質量になるのと全く同じ条件でシグマ中間子*3)の質量が

$$m_\sigma = 2M \quad (2.7)$$

となることです．したがって，$m_\pi : M : m_\sigma = 0 : 1 : 2$ の関係式が成立します．このボソンとフェルミオンの質量の関係を南部先生は擬超対称性と読んでいます[10]．

3. QCD：「強い相互作用」の基礎理論

核子や原子核あるいは湯川の中間子など「強い相互作用」をする粒子（ハドロン）たちの基本理論を追求する中で，1970 年代にその基本理論が確立しましたが，その理論を記述するラグランジアンはハドロンを構成するクォークとグルーオンの場で書かれていました．クォークはスピン 1/2 のディラック粒子であり，内部自由度として他に‘色’と呼ばれる 3 つの自由度を持っています*4)．その 3 つの内部自由度を‘緑’，‘青’，‘赤’と呼びます．そして，核子や湯川中間子を構成する u,d クォークの他にストレンジネスクォーク s など 6 種類あり，この自由度を‘香り（フレーバー）’と呼びます．一方，グルーオンはスピンが 1 のベクトル型粒子でありボソンです．グルーオンは，3 種の色から 2 つを取った組合せでしかも‘白色’を除いた $3 \times 3 - 1 = 8$ 種の‘色’の自由度を持っています．この理論はクォークの持つ‘色’荷についてのゲージ理論になっているので「量子色力学（Quantum chromodynamics: QCD）」と呼ばれています[12]．‘色荷’をゲージ化した $SU(3)$ ゲージ理論の発想を始めて与えたのも南部先生です[13]．

その（古典レベルでの）ラグランジアンは次のようになります：$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - \boldsymbol{m})q - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a$． ここで，$q^a$ はクォーク場であり，上付き添え字 ^{a} は色の自由度を表しています．$\boldsymbol{m} = \mathrm{diag}(m_u, m_d, m_s, ...)$ はクォークの質量です．$D_\mu = \partial_\mu - igt^a A^a_\mu$ は共変微分と呼ばれる演算子でグルーオン場 $A^a_\mu(x)$ を含んでいます．$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu$，$f_{abc}$ は $[t^a, t^b] = if_{abc}t^c$ で定義される $SU(3)$ の構造定数です．g は唯一の（無次元の）結合定数です．

QCD ラグランジアンに現れるクォークの質量は，電弱理論中のヒッグズ場の期待値とフレーバーに依存する結合定数の積で与えられ，カレントクォーク質量と呼びます．カレントクォーク質量の値はくりこみの効果のために観測する分解能（スケール）によります．$\mu \simeq 2\,\mathrm{GeV}$ のスケールでは，$m_u = 1.5\text{-}3.3\,\mathrm{MeV}$, $m_d = 3.5\text{-}6.0\,\mathrm{MeV}$, $70 < m_s = 130\,\mathrm{MeV}$ です．これらの値は QCD の摂動論が使えなくなるスケール $\Lambda_{QCD} \sim 200\,\mathrm{MeV}$ に比べて小さいのが重要な事実です．

さて，質量項が無視できるとき，QCD ラグランジアンでクォーク場を含むのは運動項 $\bar{q}i\gamma^\mu D_\mu q$ のみです．さらに，ベクトルカレント $\bar{q}\gamma^\mu q$ はカ

*3) これは図 1 における動径方向の揺らぎ $\tilde{\sigma}$ に対応するモードであり，電弱理論のヒッグズ粒子に対応します．

*4) この‘色’の内部自由度をクォークに導入したのも南部先生でした[11]．

イラル変換に対して不変ですから質量項が無視できるときQCDラグランジアンはカイラル変換に対して不変であることが分かります*5).

4. 非摂動QCDの二大問題：カイラル対称性の破れと閉じこめ問題

QCDの興味深い性質は，分解能に応じて粒子描像と「法則」が変化する，ということです．高分解能ではほとんど質量のないクォークとグルーオンが「見え」ます．さらに高分解能で「見る」とクォーク，グルーオン間の力は弱くなっていきます[14]：これを漸近自由性と言います．しかし，低分解能（長距離）では相互作用が強くなっていき，クォークやグルーオンは単体では取り出せないと信じられています．このことをQCDの性質として証明する問題は「閉じこめ問題」として知られ理論物理学のチャレンジです．逆に，非摂動的QCD真空上の**素励起**はハドロンという結合状態のみということになります．

さらに，QCD真空においてはカイラル対称性が自発的に破れ，ハドロンの仲間では特別に軽い湯川のパイ中間子の存在は陽子や中性子の質量の起源と結びついている，という南部先生のシナリオが成り立っています．u, d, s などの軽いクォークに対しては，カイラル対称性が良い近似で成立していると考えられ，有限の m_α を摂動で扱うと，例えば，u, d セクターでは次の関係式（ゲルマン–オークス–レナー関係式）が成り立ちます：$f_\pi^2 m_\pi^2 = -\frac{m_u+m_d}{2} \cdot \langle : \bar{u}u + \bar{d}d : \rangle$. ここで，$f_\pi \simeq 93\,\mathrm{MeV}$ はパイ中間子崩壊定数と呼ばれる量であり，左辺の : : はカレントクォークの真空についてのノーマル積です．この式の左辺は有限ですから，QCD真空においては $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$ であり，確かにカイラル対称性が自発的に破れていることが分かります*6)．QCD真空はカイラル対称性が破れて，いわば「超伝導状態」になり，クォークは相互作用の「衣」を着て新たな質量を獲得することになります．核子を3個のクォークの複合系として記述する場合，クォークの持つ質量はこのようにして生まれた質量を加えたものであり，$M_u \simeq M_d \sim M_N/3 \sim 300\,\mathrm{MeV}$ となります．この値は核子の磁気モーメントを各クォークの持つ磁気モーメント $\sim q_i\hbar/2M_i$ の和としてうまく説明できる値でもあります．この相互作用の結果生まれた質量が u, d クォークの場合，カレントクォーク質量のほとんど100倍もあることに注意してください．核子，したがって，天然に存在する我々の周りの物質の質量のほとんど（98パーセント以上）はQCDの相互作用によるカイラル対称性の破れの結果として理解できるのです．

閉じ込め問題の機構についても（双対）超伝導理論に基づいた南部先生の理論[18]があります．これは，ニールセン–オールセン[19]が第二種の超伝導体における磁束密度を伴う渦糸とハドロンの「ひも構造」の類似性を指摘したことに動機付けられたものでした．端のある「ひも」の場合を考え，ディラックの磁気モノポールの理論を援用して，双対超伝導模型を考察されています．この考えは，その後トフーフトやマンデルシュタム[20]も取り上げるとともに，現在においても「閉じ込め問題」を考える上で有効な指針となっています[21]．

さらに，温度や密度などハードなスケールが入るとQCD真空は根本的変化，すなわち相転移を引き起こし，「閉じこめ」もなく，カイラル対称性も回復した状態になると考えられます[16,17]．このような，軽いクォークとグルーオンの「スープ」のような状態はクォーク・グルーオンプラズマ（QGP）と総称されています[17]．

5. 個人的な体験

私が南部先生のお仕事[2]に注目し仕事を始めた

*5) ただし，フレーバーが2以上のとき，一般的な定義が必要です．

*6) カイラル摂動論を超えてより厳密にこれを示すにはゲージ理論としてのQCDの非摂動的な扱いが必要です．しかも，カイラル対称性を尊重した取扱いが必要です．最近，格子QCDを用いた研究に大きな進展があり，実際に上のカイラル摂動論の結果からそれほどずれていないことが日本のグループによって示されました[15]．

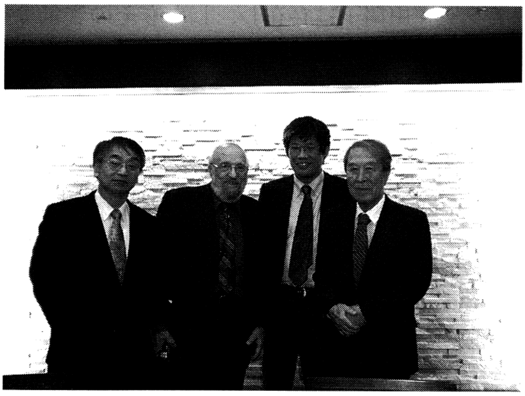
のは1983年3月からでした．そのとき，私は学位を取って3年目あたりで，文科系の私立大学に職を得て，京大の玉垣先生の主催するゼミに毎週通っていました．当時世界的には，QCD が高温・高密度で示す相転移のうち，「非閉じこめ」相転移のみがもっぱら議論されていました．私は院生時代，高密度の核物質の示すと期待されるパイ中間子凝縮の問題を研究していました．パイ中間子凝縮とはパイ中間子と核子の間の p-波相互作用で起こる相転移であり，パイ凝縮が起こるかどうかはパイ場の期待値 $\langle\pi\rangle$ が有限の場合とゼロの場合の核物質のエネルギーを比較して決められます．パイ場の期待値はアイソスピンやパリティの対称性を破ります．また，パイ凝縮をカイラルダイナミクスに基づいて議論する研究も盛んでした．さて，そのころ出たスカイルム模型の講義ノートにNJL 模型の説明があり，そこに「有効ポテンシャル」として神秘的対数を含む次のような式が書かれていました：$\mathcal{V} = iN_c \mathrm{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln\left(\frac{\gamma\cdot p - M + i\epsilon}{\gamma\cdot p + i\epsilon}\right) + \frac{m_0^2\sigma_0^2}{2}$．結局，この式が本質的に (2.4) と同じ式であり，「空孔理論」に基づく真空のエネルギーを比較しているに過ぎないことの「発見」が私にとってのブレークスルーでした．すると，直ちにパイ中間子凝縮で問題になった「相転移の前駆現象」がカイラル相転移の場合どうなるかという問題が気になります．調べてみると，そもそもカイラル相転移のシグナルについて議論している論文はほとんど皆無のようです．誰もやっていない，というのはチャンスでもあるし，恐怖でもあります：「やっていないのは何か (自明な) 理由があるのかもしれない？」しかし，論理的には問題の重要さは否定できません．

さらに，NJL 模型を勉強して衝撃だったのは，シグマ中間子の質量の公式 (2.7) でした．院生時代に習った核力の1ボソン交換模型では，「核子間の状態に依らない中間レインジの引力は質量が400～800 MeV の "σ" 中間子交換による．しかし，このような中間子は存在しない．2パイ交換による引力効果を1極近似しただけのものである.」，というものでした．ところが，NJL 模型によれば，パイ中間子がゼロ質量になるのと同じ論理でシグマ中間子は存在し，しかもその質量は大体 $2M \sim 600\,\mathrm{MeV}$ となる，と主張しています．「シグマ中間子は存在するのが当り前なのだ！ もし，自然界で観測されないとしたらむしろその理由を解明しなければならない類の事実である.」と悟りました*7)．

さらに，$m_\sigma = 2M$，そして $M \propto \langle\bar{q}q\rangle$ ですから，(2.7) はカイラル相転移の秩序変数とともにシグマ中間子の質量が変化する，ということも明快に示しています．そもそも真空の定義式 (2.5) 自体が相の変化に伴う素励起の変化を示唆しています．NJL 模型は4体フェルミ相互作用なので，それまでの非相対論的な場合に経験してきたいろいろなテクニックが使えます．NJL 模型に基づく研究は原子核/ハドロン物理学の分野に新たな沃野を開きそうである，と期待を持ちました．

問題は QCD と NJL 模型を用いた計算の関係です．それについては，修士を終えたばかりなのに私よりも格段に QCD や素粒子の現象論に強い院生が興味を持ってくれて共同研究をすることになったのでうまくいきました．それが初田哲男氏（現：東大）です．またそのころ時を同じくして，インスタントンに誘起された相互作用がNJL 型になるとか，強結合極限での QCD におけるクォーク間相互作用はやはり NJL 型であるとか，あるいは非摂動効果で重くなったグルーオン交換力を局所近似しフィールツ変換するとやはり NJL 型になる，という議論もちらほら論文として出されていることにも勇気付けられました．二人で議論しながら QCD の有効模型として NJL 模型を用いたハドロン物理，そして有限温度・密度でのカイラル相転移とその前駆現象についての研究を展開していきました．模型も2フレーバーから3フレーバーへ，3フレーバーなら η' の説明もしないといけないので，軸性アノマリーを実効的に記述する行列式型の6体フェルミ相互作用も含めることになりました．最初の論文[22]を出してから，1970 年に小林・益川両氏が η' の質量を NJL 模型に基づ

*7） 実際，今ではハドロン物理の中心課題の一つになっています．



右から南部先生，初田哲男氏，ヨナ-ラシニオ氏，私（2009 年 10 月京都にて撮影）.

いて考察する中で，4 体を超えて行列式型の 6 体フェルミ相互作用を導入しないといけない，ということを最初に指摘していることに気がつきました[23]．同じ相互作用はインスタントン配位によりクォーク間に誘引されることを 1976 年にトフーフトが示していました．それで，我々はこの 6 体相互作用を Kobayashi–Maskawa–'t Hooft (KMT) 項と呼ぶことを提案しています[7]．

このような論文を書く中で，我々の論文が南部先生の論文に引用されたことがありました．また，直接私宛に南部先生からリプリントが送られてきたことがあります．あまりの光栄にその封筒はしばらく大切にしまっておきました．今もどこかにあるはずです．さらに，1994 年ごろヨナ-ラシニオさんから我々の書いた総合報告[7]の別刷り請求が来ましたので喜んで送らせていただきました．そのこともあったからでしょうか，ヨナ-ラシニオさんが南部先生の代理で行ったノーベル賞講演では，最後に我々の仕事がスライド丸々１枚を用いて紹介されました．それは，そのまま南部先生のノーベル賞講演記録[24]にも引用されています[*8]．これほどの光栄と力付けはありません．

南部先生への深甚なる感謝の気持ちを表してこの稿を終えたいと思います．この研究は文部科学省の科研費（No.20540265）の補助を受けて行われました．

*8) ただし，文献 24) における (13) 式は，文献 7) の (1.27) 式に対応していますがミスプリントがあります．正しくは，$L_{QCD} \simeq L_{NJL} + L_{KMT} + \delta L$ だと思います．

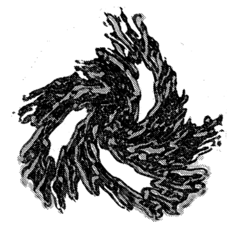
参考文献

1) Y. Nambu, Talk given at a conference at Purdue (1960), reprinted in "Broken Symmetries, Selected Papers by Y. Nambu", edited by T. Eguchi and K. Nishijima, World Scientific (1995). この論文および文献 2) の内容は文献 3) において予告されている.
2) Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345; Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **124** (1961) 246.
3) Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 380.
4) J. Bardeen, L.N. Cooper and J.R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **106** (1957) 162; *Phys. Rev.* **108** (1957) 1175.
5) Y. Nambu, *Phys. Rev.* **117** (1960) 648.
6) 南部陽一郎，「日本物理学会誌」, **32**, no.10 (1977), 773–778; Y. Nambu, *J. Phys. Soc. Japan*, **76** (2007),111002.
7) T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Rept.* **247** (1994) 221.
8) 日本語での解説として，国広悌二，「原子核研究」**53**, Supplement 3,（2009 年 4 月），p.23.
9) 分かりやすい解説として，J.J. Sakurai, *ADVANCED QUANTUM MECHANICS* (Addison-Wesley, 1967); 3-2 節を参照.
10) Y. Nambu, *Physica* **D 115** (1985), 147.
11) M.Y. Han and Y. Nambu, *Phys. Rev.* **139** (1965), B1006.
12) 「数理科学」特集「〈強い力〉」2006 年 3 月号（サイエンス社）.
13) Y. Nambu, in *Preludes in Theoretical Physics, in honor of V.F. Weisskopf* (North-Holland, 1966).
14) D.J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343; H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346.
15) H. Fukaya *et al.* [JLQCD Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 172001.
16) J.C. Collins and M.J. Perry, *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975) 1353.
17) QGP の物理全般を見渡せる参考文献として，K. Yagi, T. Hatsuda and Y. Miake, "Quark-Gluon Plasma: From Big Bang To Little Bang," *Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* **23** (2005).
18) Y. Nambu, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 4262.
19) H.B. Nielsen and P. Olesen, *Nucl. Phys. B* **61** (1973) 45.
20) G. 't Hooft, in "High Energy Physics", ed. by A. Zichichi; S. Mandelstam, *Phys. Rept.* **23** (1976) 245.
21) 例えば，近藤慶一，SGC ライブラリ 45『ゲージ場の量子論入門』,（サイエンス社，2006 年）.
22) T. Kunihiro and T. Hatsuda, *Phys. Lett. B* **206** (1988) 385; [Erratum-ibid. **210** (1988) 278].
23) T. Kunihiro, *Prog. Theor. Phys.* **122** (2009) 255.
24) Y. Nambu, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 1015.

（くにひろ・ていじ，京都大学大学院理学研究科）

特集／南部陽一郎

南部先生との思い出



菅原　寛孝

私が初めて南部先生にお目にかかったのは1965年のことである．

東大を出てコーネル大学に就職する途中ウィスコンシン州の州都マヂソンのウィスコンシン大学での夏の学校に出席するため羽田からマヂソンに向かった．当時は成田空港はなく日本からのすべての海外線は羽田から飛んだのである．夏の学校にはシカゴ大学から後に筑波大教授になられた原康夫先生も来ておられた．原先生は当時シカゴ大学に研究員としておられた．1カ月ほどの夏の学校の合間を見て原先生にシカゴにつれていっていただいた．

確か，そのときご一緒に南部先生のお宅にご招待いただいたと記憶している．南部先生は大変謙虚な方でこちらが博士号取ったか取らないかの若造であるにも関わらず，丁重なおもてなしをいただいて大変恐縮した記憶がある．南部夫人も大変気さくな方で日本食に飢えていた私どもに大変おいしい日本食を造ってくださった．

それから2年ほどしたあるとき，カリフォルニア大学のバークレイ校にいた私に南部先生からお電話がかかってきた．研究員としてシカゴに来ないかということであった．当時，バークレイは理論ではチュー先生やマンデルスターム先生がおられ実験ではアルバレ先生が一大グループを率いておられ，高エネルギー物理学の中心地であったからそれなりに魅力があったのではあるが，南部先生からのオファーということですぐに決断してシカゴ大学にご厄介になることにした．当時先生は無限成分の波動方程式に凝っておられ私はカレント代数を使って場の理論を構築する話を考えており，少し興味の方向がずれてはいたが，先生にはいつもこちらの話をきちんと聞いていただけたので大変ありがたいことであった．私のほうからは先生の理論に何も貢献できずに恐縮の至りであった．当時のシカゴには今はなきJ.J. Sakurai先生もおられ，バークレイとはまた違った雰囲気で活発に研究活動がなされていた．南部先生の謙虚なお人柄が研究室の雰囲気を和らげ若造でも大きな顔をして好きな研究ができる環境が整っていた．

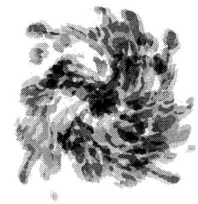
それからしばらくして1973年には，また，今度は招待教授としてご厄介になった．先生がカラーの自由度を持ったクォークのモデルを考えておられた頃である．量子色力学の先駆的研究である．私自身は色力学よりはフレーバー物理のほうに興味を移していたので今回もまた南部先生のお仕事に貢献できずに終わってしまった．南部先生の研究室にいたわけであるが当時Fermi研究所にいた今はなきBenjamin Lee氏と一緒に論文を書いたりした．

その後もいろいろなところで先生にお目にかかり，私が長年勤めた高エネルギー物理学研究所（現高エネルギー加速器研究機構）にも何度か御出でいただいた．先生は，いつも謙虚で，とつとつとした語り口の中に，凡人にはなかなか察することのできない深い物理的洞察を秘めておられる．このような先生が大変遅くなったとはいえ当然のこととしてノーベル賞をお受けになったのは本当に嬉しいことである．

（すがわら・ひろたか，
日本学術振興会ワシントン研究連絡センター）

ストリングの発想

弦理論の生みの親



米谷　民明

弦理論はその原点において，南部陽一郎先生の1969年，1970年の2論文に多くを負う．どちらも，会議講演のために用意され，通常の学術雑誌に発表されたものではないが，弦理論の最初の土台石を置いた記念碑的な仕事である．どんな背景，思考からこの発想がなされたのか解説しよう．以後，人名の敬称は略す．

1. 1960年代までの素粒子論

現代的な素粒子論は，1935年の湯川中間子論から出発した．湯川は，陽子と中性子（両方を合わせて核子と呼ぶ）から原子核を作る力＝核力を説明するため，未発見の粒子＝中間子の存在を提唱した．パイ中間子が1947–1948年にかけて実験的に確認され，中間子論が確立した．並行して，電磁気力の量子論である量子電気力学が，朝永，シュウインガー，ファインマン等を中心に発展した．無限大の困難を回避するのに有効な**繰り込み理論**により，素粒子の電磁気的性質に関して極めて正確な理論計算がなされ，精密な実験的検証ができるようになったのだ．中間子論も，発想は場の量子論に基づくが，量子電気力学で成功した摂動論と呼ばれる計算法には疑問が生じる．摂動論は，結合定数（力の強さのパラメター）に関する級数展開を用い，力が十分弱いと見なせる場合にのみしか有効でないからだ．電磁気力は，光の素粒子である光子の交換に起源がある．よって，荷電粒子における光子の放出・吸収の強さを支配する微細構造定数（通常の記号で $e^2/\hbar c \sim 1/137$）が，結合定数（以下では $\hbar = 1, c = 1$ の自然単位で話を進める）になる．しかし，中間子の交換によって説明される核力の結合定数は，大きさが1程度で，級数展開では精密な議論ができない．核子の相互作用を**強い相互作用**，強い相互作用に関与する素粒子を，**ハドロン**（強いを意味するギリシャ語に由来する）と呼ぶ．

1950年代は，ハドロン族の粒子が続々と検出され，それらを系統的に取り扱うための基本理論の追求が始まった．そこで重要な役割を果たした考え方の一つとして，**S行列**の概念がある．もとは，核子の高エネルギーでの相互作用へのアプローチの仕方として，1940年代前半にハイゼンベルクによって提唱されていたものが，復活したのだ．散乱（“S”は，scatteringのSから来ている）という直接観測されるもの自体の性質として強い相互作用を記述しようという考えだ．相互作用に寄与する粒子についての情報は，S行列の数学的性質から読み取れる．エネルギー，運動量などを複素数に拡張すると，S行列のこれらの変数に関する特異点の性質によって，粒子の質量，寿命，相互作用の仕方など，素粒子について知るべきほぼすべての情報が得られる．S行列アプローチにより，1960年代後半までに，ハドロンの相互作用には，以下に説明する**2重性**（あるいは双対性）と呼ばれる顕著な性質が見出された．

■ 2. 弦理論への道：2 重性とベネチアノ振幅 ■

ハドロンの仲間が多数あると述べたが，それらは，散乱エネルギーに関する極特異点としての共鳴状態として現れる．共鳴状態は，古典力学の強制振動でおなじみの共鳴現象とのアナロジーで理解できる．外部振動数が，系に固有の振動数に近づくと，振幅が急に増大する現象だ．外部振動数 ν を複素数に拡張して調べると，振幅は，ある点 $\nu=\nu_0$ で極を持つ．摩擦などのエネルギー損失がある場合，極の位置は実軸から離れたところにあり，振幅が増大するのは，外部振動数が，ν_0 の実部 $\mathrm{Re}\,\nu_0$ の付近のときだ．虚部 $\mathrm{Im}\,\nu_0$ は，エネルギー損失の大きさと関係している．これが小さいほどエネルギー損失が小さい．S 行列（散乱振幅と言っても同じ）の場合も，極の位置から，散乱粒子が結合して生成される共鳴粒子状態の質量と寿命，極の留数の性質からは，状態のスピン（自転角運動量）や波動関数の情報が得られる．

当時まで知られていたハドロンのスピンの大きさ (J) と質量 (M) には，規則性があり，近似的に

$$J=\alpha' M^2+\alpha_0 \equiv \alpha(M^2) \qquad (1)$$

が成り立つ．定数 α_0 は，共鳴状態の種類によって異なるが，傾きパラメター α' は，共通の値（$\sim 1\,\mathrm{GeV}^{-2}$）であった．$J$ を縦軸，M^2 を横軸にして描いた共鳴状態の分布図をチュー・フラウチのプロットと呼ぶ．そこでは，ハドロンが平行な直線上に並ぶわけだ．同じ種類の粒子の角運動量と質量の極を結んだ曲線を，**レッジェ軌跡**と呼ぶ．レッジェ軌跡が，一定の傾きを持った直線であるのが，弦理論に導く最初の重要な手がかりだ．このとき，スピンがゼロおよび 1 の状態の質量は，それぞれ $M^2=-\alpha_0/\alpha'$, $M^2=(1-\alpha_0)/\alpha'$ であることを覚えておいてほしい．

レッジェ軌跡の呼び方は，散乱振幅のレッジェ表示として知られる表し方に起源がある．振幅を散乱状態の角運動量の値ごとに分解して表す方法（部分波展開）を用い，さらに角運動量を連続的な複素数 l に拡張して振幅を表すと，共鳴状態は，

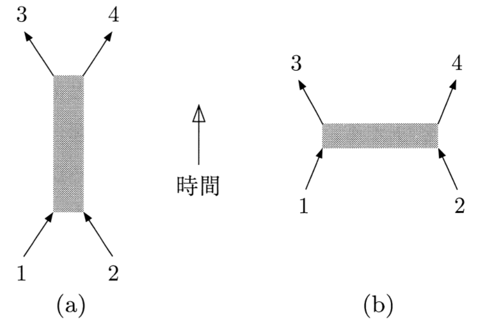


図 1　(a) s チャンネル描像, (b) t チャンネル描像.

複素角運動量空間での極（レッジェ極）に対応する．その位置は，散乱の不変 2 乗質量と呼ばれるエネルギー運動量変数 s（2 粒子散乱の場合，始状態の粒子の相対論的運動量エネルギー p_1^μ, p_2^μ から相対論的不変量 $s=-(p_1+p_2)^2$ として定義される）の関数である．共鳴状態の質量が M，スピンが J であるのが，$J=\mathrm{Re}\,l=\alpha(s)|_{s=M^2}$ に位置する極特異点として現れる（エネルギー運動量保存により，$p_1^\mu+p_2^\mu$ が 2 粒子系の全エネルギー・運動量だ）．レッジェ軌跡には，s が大きいとき，振幅の s 依存性が $s^{\alpha(t)}$（レッジェ振舞い）と近似できるという性質がある．変数 t は，散乱後の 2 粒子の相対論的運動量を p_3^μ, p_4^μ と置いたとき，$t=-(p_1-p_3)^2=-(p_2-p_4)^2$ と定義され，不変 2 乗運動量遷移と呼ばれる．図 1 (a), (b) でわかるように，変数 t は，散乱がもとの $1+2\to 3+4$ の代わりに，時間の向きを，「横向き」に見て $1+3\to 2+4$ としたときの変数 s に相当する．どちらで考えるかにより，変数の値域は異なる．始状態と終状態の粒子の質量（m）がすべて等しい場合，もとの「縦向き」（s チャンネル）のとき $s>4m^2, t<0$,「横向き」（t チャンネル）のとき $s<0, t>4m^2$ である．しかし，運動量やエネルギーを複素数として扱うならば，異なった領域も解析接続によって結びつく．レッジェ振舞いは，s チャンネルの散乱が，t チャンネルの極の性質を用いても表されることを意味する．s チャンネルで共鳴状態が生成されるという見方に代わり，t チャンネルで共鳴状態が交換されるという見方に対応する．

2 重性とは，s チャンネルの共鳴状態の合成とし

て表した振幅が，共鳴状態の情報を t チャンネルで用いたレッジェ振舞いの合成としても，同等に表せるということだ．つまり，図 1 (a) と (b) が同じ結果を与える．エネルギーに関して適当な区間で散乱振幅を平均すると，双方の振舞いが良い精度で等しい (有限エネルギー和則)．ただし，散乱振幅によっては，当時確立されていた共鳴状態には対応しない，ポメロン (真空と同じ量子数を持つ) と呼ばれる特別な寄与も必要であった．それをレッジェ軌跡で表すと，傾きは普通の場合に比べて半分で，後に弦理論にとって重要な意味を持った．

これらの発展を受けて，1968 年にイタリアのベネチアノは，2 重性を正確に満たす極めて単純な公式を発見した．最も簡単な場合は

$$V(s,t)=\frac{\Gamma(-\alpha(s))\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s)-\alpha(t))} \qquad (2)$$

の形である．これは始状態と終状態の粒子のスピンがすべてゼロで $\alpha(m^2)=0$ を満たす場合である．正確には，交差対称性と呼ぶ始状態と終状態の粒子の交換の下での対称性の要請のため，この形の適当な線形結合を取る必要があるが，2 重性を見るにはこれで十分だ．$\Gamma(x)$ は，**ガンマ関数**として知られているので，知っている人が多いだろう．(2) の比の形は**ベータ関数**と呼ばれる．共鳴状態の極は，ガンマ関数が $x=0,-1,-2,\ldots$ で極を持つ ($\Gamma(x)\sim\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$, $x\to -n$, n は，非負整数) のに対応する．レッジェ振舞いは，$|x|$ が大きいときの漸近形 ($\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)}\sim x^{a-b}$) からわかる．**ベネチアノ振幅**は，すぐに始状態，終状態の粒子数が 2 を超える多点振幅へ拡張された．以下では簡単のため，ベネチアノ振幅だけを考える．

■ 3. 弦理論の誕生 ■

ベネチアノ振幅は 2 重性を正確に満たすのに対応して，s チャンネルの極の合成だけでも t チャンネルの極の合成だけでも同等に表せる．

$$V(s,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_n(t)}{n-\alpha(s)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R_n(s)}{n-\alpha(t)}. \qquad (3)$$

留数に現れた関数 R_n は，括弧内変数の n 次多項式である．共鳴状態の極は，実軸上で $s\,(\mathrm{or}\,t)=M^2=(n-\alpha_0)/\alpha'$ にあり，無限に存在する．実軸上にあるのは，共鳴状態がエネルギーについて限りなく細いピークになっていて，寿命が無限大であるのに相当する．これは，現実の共鳴状態とは違うが，2 重性を正確に満たすという理想化のために必要な近似と見なされる (狭巾共鳴近似)．

極は，最初の等式で言えば，共鳴状態 $R_i(n)$ が始状態の 2 粒子から生成 ($1+2\to r_i(n)$) されて伝播した後，終状態の 2 粒子に分かれる ($r_i(n)\to 3+4$) 過程を表している．これに対応し，留数はそれぞれの過程を表す振幅の積の線形結合の形を取るはずだ．

$$R_n(t)=\sum_i\langle 1,2|r_i(n)\rangle\langle r_i(n)|3,4\rangle. \qquad (4)$$

$r_i(n)$ は，$M^2=(n-\alpha_0)/\alpha'$ の共鳴状態が多数あってよいので，添字 i で区別して表すために導入した記号だ．和の各項は，始状態の情報と終状態の情報それぞれだけを含む因子の積になっていることが重要である．これを，留数の因子化と呼ぶ．

因子化の中身から，散乱に寄与する共鳴状態の素性がわかるはずだ．それには，次の積分表示に気づくのが重要なステップになる．

$$V(s,t)=\int_0^1 dx\,x^{-\alpha(s)-1}(1-x)^{-\alpha(t)-1}. \qquad (5)$$

被積分関数の第 2 の因子 $(1-x)^{-\alpha(t)-1}$ を $x=0$ の周りで無限級数に展開したものを

$$(1-x)^{-\alpha(t)-1}=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(t)\,x^n \qquad (6)$$

とすると，(3) の最初の等式が得られる．積分 $\int_0^1 dx\,x^{-\alpha(s)+n-1}=1/(n-\alpha(s))$ は，s を複素平面に拡張し $\mathrm{Re}\,(s)<0$ の領域に移動させて実行した後，結果をもとの値まで解析接続したと考えればよい．同様に，$y=1-x$ として $y=0$ の周りで無限級数展開を行えば，第 2 等式が得られる．

南部が着想したのは，調和振動子の量子力学に詳しい読者 (coherent state を思い出してほしい) にはなじみの公式を用いることだ．

$$\langle 0|e^{Aa}e^{Ba^\dagger}|0\rangle=e^{AB},\quad x^{a^\dagger a}e^{Ba^\dagger}|0\rangle=e^{xBa^\dagger}|0\rangle.$$

A,B は，任意の複素数，$a^\dagger,a$ は，調和振動子の

励起状態の表示に用いる生成消滅演算子（$[a, a^\dagger] = 1$, $a|0\rangle = 0 = \langle 0|a^\dagger$ を満たす）だ．この公式を眺めていると，(6) のままではなく，指数関数の形（$(1-x)^K = e^{K\ln(1-x)}$）にして級数展開すれば，何故，調和振動子を使えるかが見えてくる．

$$(1-x)^{-\alpha(t)-1} = e^{2\alpha' p_1 p_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}}$$
$$\times\ 1-x)^{\alpha' p_1^2 + \alpha' p_3^2 - \alpha_0 - 1}. \qquad (7)$$

始状態と終状態の粒子の質量は共通の m だから，2 行目は，$(1-x)^{-(2\alpha' m^2 + \alpha(0) + 1)}$ に等しい．因子化には，p_1 だけに依存する因子と p_3 だけに依存する因子の積の線形結合の形に書きたい．2 行目は，因子化を妨げるものではないが，弦の解釈にはやっかいな寄与だ．このため，南部論文では，通常の運動量の成分を，仮想的に余剰次元に拡張するという細工をしている．実は，最終節で触れるように，弦理論としては，$\alpha_0 = 1$，従って $\alpha' m^2 = -1$ のときのみ意味があることが後に明らかにされた．このとき，2 行目は 1 に等しい．話を簡単にするため，この条件を仮定しよう．

調和振動子の公式と比較すると，指数関数の肩に現れた無限級数に対応させて，無限個の生成消滅演算子を導入すればよいのに気がつく．つまり，無限級数の $n\,(\geq 1)$ 項目に対応させて，時空座標のそれぞれの方向（μ）ごとに，$a_n^{\mu\,\dagger}, a_n^{\mu}$ を独立な生成消滅演算子として定義する．

$$[a_n^{\mu}, a_m^{\nu\,\dagger}] = \delta_{nm}\eta^{\mu\nu}, \quad [a_n^{\mu}, a_m^{\nu}] = 0 = [a_n^{\mu\,\dagger}, a_m^{\nu\,\dagger}].$$

このとき，各 n ごとの調和振動子の公式により

$$e^{2\alpha' p_1 p_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}} = \langle 0| e^{-i \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\alpha'}{n}}\, p_1 a_n}$$
$$\times\ e^{-N\tau} e^{i \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\alpha'}{n}}\, p_3 a_n^\dagger} |0\rangle \qquad (8)$$

が成り立つ．ただし，$N = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^\dagger a_n$，$\tau = -\ln x$ と置いた．ベクトル添字を省略したところは，すべて相対論的内積である．積分変数を含む中間因子は，次の形を与えるので

$$\int_0^{\infty} d\tau\, e^{(\alpha(s)-N)\tau} = \frac{1}{N-\alpha(s)}, \qquad (9)$$

(8) は，因子化 (4) を実現している．極の位置は，N の固有値に対応し，添字 i で表した線形結合は，同じ固有値を持つ（つまり「縮退」した）固有状態

の完全系についての和に他ならない．$\alpha(M^2)=n$ を満たす極に寄与する状態では，N の固有値が n に等しい．その中でベクトル添字を最大個数持つ状態は，最初の生成演算子が n 個 $|0\rangle$ に作用した状態 $a_1^{\mu_1\,\dagger}a_1^{\mu_2\,\dagger}\cdots a_1^{\mu_n\,\dagger}|0\rangle$ である．一つのローレンツ添字ごとに最大 1 の角運動量を持つので，この質量での最大スピン J は，n に等しく，確かに直線のレッジェ軌跡に対応している．2 番目以降の生成演算子がいくつか作用すると，より小さいスピン状態も与えるから，実は，α_0 の値が 1 ずつ下にずれた無限に多くの平行直線で表されるレッジェ軌跡（娘軌跡と呼ぶ）がある．

(9) は，場の量子論の伝搬子の固有時間表示と同じである．場の量子論をまだ学んでいない人でも，N がハミルトニアンであり，パラメター τ を普通の量子力学の時間を純虚数に置き換えて考えれば，時間推進演算子であることをアナロジーにより理解できるだろう．固有時間は粒子の場合，時空の中での粒子軌道のパラメター表示として導入される．それは，時空座標と独立に選ぶことができ，ローレンツ変換の下で不変で，粒子の運動を時間座標と空間座標を区別せずに完全に相対論的に扱うときによく用いる．

無限に多くの調和振動子の系は，波の振動を考えると自然に現れることは想像に難くない．波は，無数に多くの異なった正弦・余弦振動に分解（フーリエ展開）できるからだ．まず，一つの時空方向にだけ横振動している 1 次元の弦を考えよう．弦に沿った 1 次元方向の座標パラメターを σ，振動の振幅を $x(\sigma,t)$ とする．σ に関する区間長を適当に調節して π に選ぶと都合が良い．時間変数のスケールも適当に調節すると，運動方程式は，

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 x}{\partial \sigma^2} \tag{10}$$

（1 次元波動方程式）と書ける．右辺は，振幅の σ に関する傾きの変化率が力を与えることに対応している．このとき，エネルギー保存則は，

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}=\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \sigma} \tag{11}$$

$\mathcal{H}=\frac{1}{4\pi\alpha'}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2\right], \mathcal{P}=\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \sigma}$ となる．$\mathcal{H}$ がひものエネルギー密度，$\mathcal{P}$ は，σ 方向に流れる運動量密度である．エネルギー $\int_0^\pi d\sigma\mathcal{H}$ が保存するには，端点 $\sigma=0, \sigma=\pi$ で弦が自由に運動できるとすると，そこでは σ 方向運動量密度はゼロでなければならないことから，境界条件 $\partial x/\partial\sigma|_{\sigma=0,\pi}=0$ を満たさなければならない（連続の式 (11) を σ について積分してみよ）．

このとき，運動方程式と境界条件を満足する一般解は，X, P を重心運動の座標と運動量として，

$$x(\sigma,t)=X+2\alpha' Pt + \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\alpha'}{n}}\left(a_n e^{-int}+a_n^\dagger e^{int}\right)\cos n\sigma \tag{12}$$

と書ける．係数として現れた $a_n^\dagger, a_n$ が，前の生成消滅演算子と同じとすると，エネルギーは，N に重心運動の寄与 $-\alpha' s=\alpha' P^2$ を加えたものになる．つまり，時空方向それぞれに弦の振動を導入して x を相対論的ベクトル x^μ に置き換えれば，ハミルトニアンが $H=N-\alpha(s)$ になる．ただし，演算子の順序は生成演算子が前（＝左側）だとする．この順序を正規順序と言う．$\alpha(0)$ は，ゼロ点振動の寄与とみなせる．生成消滅演算子の交換関係を用いると，ハイゼンベルクの運動方程式から，(10) も導ける．(9) に現れた時間推進演算子の形 $e^{-H\tau}$ から，ベネチアノ振幅の解釈のためには，複素化 $t\to -i\tau$（Wick 回転）したパラメターを採用すべきだ．外線に対する条件 $\alpha(M^2)|_{M=m}=0$ は，始状態と終状態の粒子が弦の基底状態であることを示している．

さらに，頂点演算子と呼ばれる

$$V(p) = e^{ipX}e^{i\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\alpha'}{n}}pa_n}e^{i\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\alpha'}{n}}pa_n^\dagger} \equiv :e^{ipx(0,0)}: \tag{13}$$

（$:\cdots:$ は，正規順序であることを明示する記号）を用いると，ベネチアノ振幅は

$$\int_0^\infty d\tau\langle p_4,0|V(-p_3)e^{-H\tau}V(p_1)|0,p_2\rangle \tag{14}$$

と表現できる．被積分関数は，時間が進む順に右から左に読んで，運動量 p_2^μ の弦 2 の端点 $\sigma=0$ にて弦 1 が運動量 p_1^μ で入射結合し，固有時間間隔 τ にわたって伝播した後，端点 $\sigma=0$ で運動量 p_3^μ の

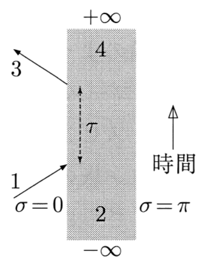


図 2　(14) 式は，右から左へ読んだとき，この図のような過程に対応する．

弦 3 を分離放出し，運動量 p_4^μ の弦 4 に遷移する過程を表している（図 2）．頂点演算子が因子 e^{ipX} を含むのは，運動量を p だけずらす効果を持つ演算子であるためだと考えると納得できるだろう．

こうして，時空の各独立方向ごとに ϕ に相当する弦の自由度 x^μ を想定すれば，共鳴状態が見事に表せる．弦の振動の固有状態は，方程式 $H|\Psi\rangle = |0\rangle$ を満たす．これは，場の理論のクライン・ゴルドン方程式を無限成分に拡張した形をしており，弦の自由伝播を表す波動方程式と看做せる（南部は，マスター方程式と呼んだ）．$x^\mu(\sigma,\tau)$ は，弦が時空に描く軌跡を表す．これを，粒子軌跡の場合に用いる**世界線**と同じ流儀で，**世界膜**と呼ぶ．2 個のパラメター (σ,τ) が，世界膜が 2 次元面であることに対応し，σ が膜に沿った空間的方向を，τ が時間的方向を表す．与えられた紙数に近づいてきたので，いくつか補足して終えよう．

■ 4. 補足とその後の進展 ■

(1) クォーク模型との関係：南部論文は，弦の振動による解釈と，クォーク模型との関係を強調している．ハドロンをクォークの複合系として理解しようとするアプローチは，S 行列アプローチと並んで 1960 年代に進展した．60 年代の終盤，クォークを調和振動子の力で結びつける模型により，ハドロンのスペクトルや，形状因子などを説明する研究がなされていた．調和振動子と散乱を結びつけるアイデアは，その意味で自然な成り行きであった．また，弦の世界膜の描像は，当時盛んに論じられていた**クォーク流れ図**によるハドロン散乱の定性的分類と近い．ベネチアノ振幅の因子化の弦による記述は，これらをより精密化し統合したものと言える．強い相互作用は，1970 年代中盤になり，ゲージ場理論に基づく**量子色力学**により，結局は，クォークの**ゲージ相互作用**により説明されるべきであることが判明したのだが，弦描像は，量子色力学でクォークをハドロン内に閉じ込める長距離相互作用の定性的振舞いに対する模型として重要な役割を果たした．

(2) ゴーストとタキオンの問題：条件 $\alpha_0 = 1$ を認めると，$m^2 = -1/\alpha'$ となってしまい，弦の基底状態の質量 m が虚数になる．質量が虚数の粒子を想定すると，超光速で伝播し，タキオン（早いを意味するギリシャ語に起源がある）と呼ばれる．タキオンが存在すると真空は安定に存在できない．では何故この条件を仮定するか，読者は戸惑うだろう．それは，より重大な困難が解決できるからだ．弦の振動子は，時空のすべての方向で独立に必要で，時間方向も含む．しかし，時間方向（$\mu = 0$）の生成消滅演算子の交換関係は，$[a_n^0, a_n^0] = \eta^{00} = -1$ を満たし，それらを奇数個含む状態の内積は負になってしまう（例えば，$\langle 0|a_1^0 a_1^{\dagger 0}|\rangle = -1$．このような状態をゴーストと呼ぶ）．これでは，ゴーストが無限に存在し，内積の正定値性に基づく量子力学の確率解釈が破綻する．

ところが，$\alpha_0 = 1$ のときに限って，もし時空次元が 26（臨界次元）を超えなければ，ゴーストは打ち消し合い，留数には効かないことが後に示されたのである．この条件の下では，マスター方程式は，$H|\Psi\rangle = |0\rangle$ に加えて無限個の補助条件 $L_n|\Psi\rangle = 0, (n = 1, 2, \ldots)$ を併せたものになる．このとき，補助条件によりゴーストはすべて消去できるのだ．このメカニズムの起源は，弦理論が満たす共形不変性と呼ばれる対称性にある．運動方程式 (10) が，2 個の任意関数 $F_\pm$ による座標変換 $\tau \pm \sigma \to \tau' \pm \sigma' = F_\pm(\tau \pm \sigma)$ の下で不変であるのに対応する．演算子 L_n は，H と併せてこの変換の無限小生成子に他ならない．いずれも $\mathcal{H}, \mathcal{P}$ を組み合わせて作られる．また，この共形

不変性は，図 1, 2 がすべて同等であることを保証し，弦理論の構造を支える対称性である．南部は，69 年の最初の弦理論の提唱に引き続き，翌年，ある会議講演のために用意した論文で，弦の作用原理を提唱した（実は，南部はこの会議にある事情のため出席できず，論文も公表されなかった．少し遅れて，後藤も同じ作用を提唱した．現在，南部–後藤作用として知られる）．南部自身は，この作用に基づいた弦理論の展開には進まなかったが，他の研究者の寄与により，2〜3 年のうちに，作用原理に基づき補助条件の理解が深まった．

また，70 年代中盤までの進展により，弦理論は半整数スピン（$J = 1/2, 3/2, \ldots$）を含むように拡張され，さらに対称性が拡大された結果（超対称性と呼ばれる整数スピンと半整数スピンの状態間の対称性），タキオンも消去できることが判明した．

(3) 相互作用の統一理論へ： 条件 $\alpha_0 = 1$ の下では，弦の最初の励起状態はスピン 1 で質量ゼロの状態である．詳しく説明する余裕がないのが残念だが，ポメロンのレッジェ軌跡に対応する振幅が 1969 年，ビラソロによって発見された．この振幅は，端点を持たない輪のような形の閉じた弦に対応する．この場合は，ゴースト消去の代償として，スピン 1 に代わって，スピン 2 で質量ゼロ状態が現れる．だが，ハドロン族の粒子には，質量ゼロの状態は存在しない．さらに，これらの振幅が基づく狭巾共鳴近似に対する補正（ループ補正とも呼ばれる）を加えてゆくと，理論が意味を持つのは，時空次元が正確に臨界次元でなければならないことが判明する．これらのことから，弦理論は，実は現実のハドロンの理論ではないことが 70 年代中盤に認識された．しかし，スピンが 1 や 2 で質量ゼロ状態が現れるのは，まさしく電磁気相互作用を含む**ゲージ場の理論**および**一般相対性理論**に基づく**重力の理論**の特徴である．このことがもとになって，1980 年代中盤から，自然界のすべての相互作用の統一理論候補としての弦理論という再認識へとつながったのである．

（よねや・たみあき，放送大学教養学部）

南部括弧式とM理論

松尾 泰

1. はじめに

この稿の題名である「南部括弧式」は物理学を専門に学んだ人にとっても聞き慣れない人が多いのではないだろうか．南部括弧式はその名前から明らかなように南部が1973年に[1]導入した概念である．南部の考えることは先見の明がありすぎて凡人がその価値に気がつくのに時間がかかることが多いとはよく言われるが，南部括弧式はその最たるものの一つではないだろうか．この稿で解説するように，南部括弧式はストリング理論を統合的に扱う「M理論」の対称性を記述しているのではないかと以前より期待されていたがその理論展開を行うことは最近に至るまで大変難しかった．それが2007年のBaggerとLambertの研究により[2] M理論のブレーンの対称性として具体的に応用されその重要性が確立された[3]．発見からブレークするまでに30年以上が費やされたのであった．南部が発見した概念はこれほど長い年月の間，人々に研究されるだけの基本的な重要性が認識されながら，その一方でそれだけの期間，研究されたのにも関わらず，つい最近になるまで理論体系に組み込むことが難しかったのである．

2. 解析力学の復習

南部括弧式がどのようなものであるのか，概念自体は大学で物理学をある程度勉強した人にとっては容易であろう．まず解析力学で本質的な役割を果たす**ポアソン括弧式**を思い出そう．

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right). \quad (1)$$

ここで q は座標変数，p は運動量変数である．運動方程式はハミルトニアン $H(p,q)$ を用いて

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

のように書かれるがポアソン括弧式を用いると $\dot{q}_i=\{H,q_i\}$, $\dot{p}_i=\{H,p_i\}$ のように書き換えることが可能で，さらに，q,p の任意関数 $f(p,q)$ の時間発展も

$$\dot{f}=\{H,f\} \quad (2)$$

という統一的な形で書くことができる．

ポアソン括弧式は対応原理を通じて**古典力学系と量子力学を橋渡しする**重要な役割を果たしている．すなわちポアソン括弧を交換子に置き換えて

$$\{f,g\}\to[\hat{f},\hat{g}]=\hat{f}\hat{g}-\hat{g}\hat{f}. \quad (3)$$

座標と運動量の交換関係を $[q_i,p_j]=i\hbar\delta_{ij}$ のように設定すると量子力学のハイゼンベルグ方程式は(2)と同じような形で書くことができる：

$$-i\hbar\dot{f}(\hat{q},\hat{p})=[\hat{H},f]. \quad (4)$$

このようにポアソン括弧式は量子力学への発展の基礎を与えているだけでなく，古典力学系の構造

的な特徴を見通しの良い形で示している．その代表的なものが**リウヴィル（Liouville）の定理**，すなわち座標と運動量で張られる**位相空間**の体積要素 $\prod_i \Delta q_i \Delta p_i$ が時間的に変化しないというものである．この古典力学の持つ構造は例えば統計力学のような無限に近い自由度を持つ系でも保たれていて確率密度の分布関数，例えばカノニカル分布

$$e^{-\beta E}\prod_{i=1}^{N} dp_i dq_i \tag{5}$$

が時間的に不変であることを保証している．

ポアソン括弧式と交換関係は共通の性質（**ヤコビ則**）：

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0 \tag{6}$$

を満たしている．交換関係においてはこの式は量子化された演算子の積が**結合則** $\hat{f}\cdot(\hat{g}\cdot\hat{h})=(\hat{f}\cdot\hat{g})\cdot\hat{h}$ を満たしていることを意味する．これは行列の積の重要な性質であり，量子力学における力学変数が行列で書かれていることを示唆するものである．ヤコビ則を用いると 2 つの運動定数 f,g の Poisson 括弧（交換子）$\{f,g\}$ も運動定数であることを導くことができる．

3. 南部括弧式

南部は以上のような古典力学系の特徴を引き継ぐようなある種の一般化された力学系を考案した．そこで指導原理として考えたのは，上で述べたリウヴィルの定理である．今，座標と運動量という 2 つの力学変数の代わりに x_1, x_2, x_3 という 3 つの力学変数を一つのかたまりとして取り扱ってみる．このとき位相体積に対応するものは無限小体積 $\Delta V=\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$ であり，運動方程式が体積を保存するような変換であるという要請になる．この性質を持つ方程式として南部は次のような運動方程式を提案した：

$$\dot{x}_i=\{H,K,x_i\}=\epsilon_{ijk}\partial_j H\partial_k K, \tag{7}$$

$$\{f,g,h\}=\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\partial_i f\partial_j g\partial_k h. \tag{8}$$

ここで H と K は x_1, x_2, x_3 の関数であり，解析力学のハミルトニアンに相当するものである．(7) の右辺は $\partial_i(\epsilon_{ijk}\partial_j H\partial_k K)=0$ を満たすので体積要素は実際不変になる．また H と K は (7) の時間発展の下で不変であることが示せるのでカノニカル分布に相当する時間的に不変な確率密度も

$$e^{-\beta H-\kappa K}dx_1dx_2dx_3$$

のように書くことができる．

南部括弧式で定義される力学系は通常のものと異なる点がいくつかある．その最も顕著なことは 2 種類のハミルトニアンに相当する保存量 H, K を有する点である．論文[1)]ではそのような力学系の例として剛体の運動を例として取り上げている．いま 2 個のハミルトニアンを正のパラメータ I_1, I_2, I_3 を導入して

$$H=\sum_{i=1}^{3}\frac{(x_i)^2}{2I_i},\quad K=\sum_{i=1}^{3}(x_i)^2 \tag{9}$$

と書くと運動方程式 (7) は

$$\dot{x}_i=\epsilon_{ijk}\left(\frac{1}{I_j}-\frac{1}{I_k}\right)x_jx_k \tag{10}$$

となる．この方程式は $x_i=I_i\Omega_i/2$ のようにとると（Ω_i は角速度）I_i を慣性モーメントとする剛体の運動方程式（オイラー方程式）

$$I_1\dot{\Omega}_1+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3=0,\cdots$$

と一致している．また 2 個のハミルトニアン H, K はそれぞれ回転エネルギーと角運動量と同一視できる．

ポアソン括弧式が量子力学や統計力学に発展する基礎を与えているのに対して，南部括弧式に同じような発展性を期待するのは自然なことであり，論文[1)] でも詳細に調べられた．しかし，結果的に難しい点も多々あることがわかってきた．

まず，難しい点の一つは**多変数化**である．この稿でも既に導入しているが N 個の対に対するポアソン括弧式 (1) はヤコビ則 (6) を満たしており，その性質が力学系を定義する上で必要不可欠な役割を果たしている．また座標変数と運動量変数を

一般には混ぜ合わせるような変換（正準変換）

$$\delta q_i = \{F, q_i\}, \quad \delta p_i = \{F, p_i\}$$

（ここで F は q, p の任意関数）が存在している．

一方，南部括弧式に対しても同様の一般化は容易に予想できて $3N$ 個の変数 x_i^I ($i = 1,2,3,$ $I = 1,2,\cdots,N$) の変数を用いて

$$\{f,g,h\} = \sum_{i,j,k}^{3} \sum_{I=1}^{N} \epsilon_{ijk} \frac{\partial f}{\partial x_i^I} \frac{\partial g}{\partial x_j^I} \frac{\partial h}{\partial x_k^I} \quad (11)$$

と定義するのが自然であるが，この構造を不変にするような座標変換を定義しようとすると，異なる I, J に対する x_i^I と x_j^J を互いに入れ替えるような変換が全く許されないことがわかる．一般に変数の時間発展は南部括弧式を不変にしなくてはいけないので，このことは異なる I, J に対する力学的自由度が時間発展の下で全く混ざり合わないことを意味している．すなわちこのようにして定義された力学系はもともとの3次元の力学系の単なる直積になってしまう．またこれと密接に関連することとして南部括弧式に対するヤコビ則の一般化（**基礎恒等式**，Fundamental identity と呼ばれる）

$$\begin{aligned} &\{F_1, F_2, \{G_1, G_2, G_3\}\} \\ &= \{\{F_1, F_2, G_1\}, G_2, G_3\} \\ &\quad + \{G_1, \{F_1, F_2, G_2\}, G_3\} \\ &\quad + \{G_1, G_2, \{F_1, F_2, G_3\}\} \qquad (12) \end{aligned}$$

を $N \geq 2$ の場合 (11) は満たさない．ポアソン括弧式の場合ヤコビ則のおかげで時間発展や正準変換が矛盾なく導入できていたが，南部括弧式の場合は多変数化は見かけよりも難しいことがわかる．

もう一つの南部力学系の困難として**量子化**がある．ポアソン括弧式に対しては括弧式を行列の交換関係に置き換えることにより量子化が定義され行列の積がヤコビ則を満たすことにより，古典論から量子論へスムーズに移行が可能である．南部括弧式は3個の引数について完全反対称だからその量子化も同じように反対称であるべきであろう．もしこの要請を行列の積に対して行おうとすると，

$$\begin{aligned} [A,B,C] &= ABC + BCA + CAB \\ &\quad - ACB - BAC - CBA \quad (13) \end{aligned}$$

のように定義するのが自然であろう．

また3重積が自然に導入できる行列の一般化なども考えられた．その一つは**立方行列**（cubic matrix）と呼ばれるもので3個のインデックスをもつ（例えば A_{ijk}, $i = 1, \cdots, N$）行列の概念の一般化である．3重積の定義法はいくつかあるが例えば

$$(A,B,C)_{ijk} = \sum_{l=1}^{N} A_{ljk} B_{ilk} C_{ijl} \quad (14)$$

などととることができる．さらに (13) のような反対称化を行えば，南部括弧式の量子化の一つの方法を与える．

以上のように行列，あるいはその一般化の3重積を考えることにより南部括弧式の量子化は様々な形で提案されてきたがその方法は決して一意的ではなかった．量子化の一つのガイドラインとして基礎恒等式 (12) を要請することが自然であるが，上に述べた例も含めてどの量子化の方法も基礎恒等式を満たさず，難問として残されてしまった．

4. ブレーンの力学と南部括弧式

以上のように，南部括弧式により全く新しい力学系の可能性が提案されたが，そのアイディアにとどまる限り，上で述べたような困難を乗り越えることはできなかった．しかし，その一方で南部括弧式が30年以上も一部の研究者の間で研究されてきたのは，もちろんそれ自体の数学的な構造の興味深さがあったことも事実であるが，その後現れてきたM理論を代表とするブレーンの理論との関連性が大きな動機づけを与えてきたことも事実であろう．

M理論にせよストリング理論にせよ，この短い文章でその理論体系を詳しく解説することは無理であるが，**ブレーン**（brane）とは何かを説明する

ことはそれほど難しくない．brane は mem**brane**（膜）の *mem* の部分を取り去った造語である．膜はシャボン玉の膜のように 2 次元的にひろがった対象であるが，ストリング理論や M 理論では一般に p 次元にひろがった対象が現れる．これを membrane の代わりに p-brane と呼んだ．特に $p=0$ の場合は点粒子，$p=1$ の場合は曲線などを表すから**ストリング**，$p=2$ の場合は膜となる．

空間的に p 次元，時間的に 1 次元にひろがった物体を数学的記述するためにはブレーンの埋め込み座標 X^μ $(\mu=0,1,\cdots,d)$ を p 個のパラメータ $\xi^0,\xi^1,\cdots,\xi^p$ の関数として表示するのが最も簡単である．ここで ξ^0 は時間的なパラメータであり ξ^i $(i=1,\cdots,p)$ は空間的パラメータである．

さてブレーンは $p=1$ の場合はその長さ（さらに $p=2,3,4,\cdots$ のときは面積，体積，超体積など）を最小にするような方程式に従う．つまり作用が長さなどで書けていて，変分によりそれが極小になるような配位をする．上で考えた埋め込み関数 X^μ を用いると，無限小超体積要素は

$$dV=-\sqrt{-\det g}\;d\xi^0\cdots d\xi^p, \tag{15}$$

$$g_{\alpha\beta}:=\sum_{A=1}^{d}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial X_\mu}{\partial\xi^\beta} \tag{16}$$

となる．これから作用はこの超体積に比例し，

$$S=-T_p\int d^{p+1}\xi\sqrt{-\det g} \tag{17}$$

となる．ここで T_p はブレーンの張力と呼ばれているパラメータでブレーンが持つ単位体積あたりの質量を表す定数である．ストリング（$p=1$）に対する作用 (17) は南部・後藤作用と呼ばれる．以下では任意の p に対して定義された (17) も南部・後藤作用と呼ぶことにする．この作用に代表されるように南部はストリング理論のパイオニアとして有名であることはいうまでもない．

実は，南部・後藤作用は南部括弧式と非常に近い関係にある．超体積要素に現れる $\det g$ であるが，定義を丁寧に追うと

$$\det g=\sum_{A_0<\cdots<A_p}\left\{X^{A_0},\cdots,X^{A_p}\right\}^2, \tag{18}$$

$$\{f_0,\cdots,f_p\}=\frac{\partial(f_0,\cdots,f_p)}{\partial(\xi^0,\cdots,\xi^p)} \tag{19}$$

のように書き換えることができる．(19) は $p+1$ 変数に一般化された南部括弧式である．つまり $p=1$ の場合がポアソン括弧式であり $p=2$ の場合がこれまで考えてきた南部括弧式である．M 理論では基本的な力学変数が膜（$p=2$）であると考えられているので，南部括弧式と M 理論の関係は基礎的なレベルで明らかであり，上で述べたように南部括弧式の重要性は最初から認識されていた．

南部・後藤作用は非線形であり，そのままでは取扱いが難しい．幸いストリング理論（$p=1$）の場合は光円錐ゲージ（lightcone gauge）にゲージ固定を行うか，あるいはポリヤコフが導入したように 2 次元面に計量を独立変数として導入して，作用を書き換えると，埋め込み関数 X^μ に対する作用は自由場のものに帰着できることがわかっている．この手法を用いるとストリングに対しては埋め込み関数を量子化することが可能である．これによりストリングがどのような時空の場を生成することかが明らかとなった．その中にはアインシュタインの一般相対論を記述する重力場やゲージ相互作用を仲介するベクトル粒子などがあり，現在のストリング理論の発展の基礎を与えている．

一方 $p\geq 2$ の場合，特に膜の運動については，たとえ光円錐ゲージ固定を行ったとしても，相互作用が残ることがわかっている．通常相互作用がある系に対しても結合定数が小さければ摂動法を用いて理論を定義することができるが，今の場合は結合定数が有限の大きさを持ち摂動法も適用できるかどうかよくわからない．したがって M 理論でどのような粒子のスペクトルが得られるかなどは難問として現在でも残っている．

5. M2 ブレーンの理論に現れた南部括弧式

以上のように M 理論の膜の運動は大変難しいものである．しかし，膜がほぼ平坦であり例えば x^1x^2 平面に重なっていてそれからわずかしかず

れていないという場合には，近似的に自由場の作用に帰着させることができる．この場合パラメータ ξ^0, ξ^1, ξ^2 を再定義して

$$X^0 = \xi^0, \quad X^1 = \xi^1, \quad X^2 = \xi^2 \qquad (20)$$

とおくことができる．$\xi^\alpha = x^\alpha$ のように書き換えると

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + \sum_{i=3}^{d} \frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial X^i}{\partial x^\beta} \qquad (21)$$

と書けるので X^i $(i = 3, \cdots, d)$ が小さいと考えて高次の項を落とすと南部・後藤作用は

$$S \sim -T_2 \int d^3x \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial X^i}{\partial x_\alpha}\right) \qquad (22)$$

に帰着する．第一項は発散しているが力学変数 X に依存していないので無視することができる．一方第 2 項は $d-2$ 個の変数 X^i の自由場の作用に他ならない．ここでは $\frac{\partial X}{\partial x}$ が非常に小さいと仮定することにより高次の項を落としていることに注意する．

さて M 理論は 11 次元（$d = 10$）で定義される超対称な理論である．M 理論に現れるブレーンについては AdS/CFT 対応と呼ばれる重力理論を用いた解析により，ブレーンの自由度に関する奇妙な振舞いが知られている．

特に注意を要するのがブレーンが複数枚現れたときの自由度の数，すなわちエントロピー則に関するものである．まず，通常の場合を思い起こすため粒子の場合を考えると，粒子を N 個集めると自由度の数は N 倍される．例えば N 個の粒子のそれぞれの座標が力学変数となる．

次にストリング理論に現れる D ブレーンの場合を考えると N 個集めたときの自由度の数は N 倍ではなく N^2 倍になることが知られている．これは奇妙な現象であるが D ブレーンの性質，つまり開弦の端点を与えるものが D ブレーンであることを思い出すと，N 枚の D ブレーンがある場合には開弦の自由度は両方の端をどの D ブレーンにつけるかということになり，それは N^2 個の場合の数があることがわかる．この N^2 個の自由度は D

ブレーン上の力学変数が $U(N)$ のゲージ理論であることからも理解が可能である．

M 理論に現れるブレーンは 2 種類で 2 次元のブレーン（膜，M2 ブレーンと呼ばれる）と 5 次元のブレーン（M5 ブレーン）である．上で述べたように重力理論との対応関係で M2 ブレーンが N 枚集まったときの自由度の数は $N^{3/2}$ のオーダーで増えていき，M5 ブレーンの場合には N^3 のオーダーで増えることが示された．これは奇妙な法則でありDブレーン上のゲージ理論に対応する理論は M 理論の場合にはどのようになるのか，何か新しいタイプの対称性があるのではないかと考えられた．例えば南部括弧式の量子化の際現れた立方行列は N^3 の自由度を持っているので，南部括弧式でブレーンの内部対称性が書けるのではないかという予想がなされるようになった．

この予想をある意味で具現化したのが Bagger–Lambert による論文[2)]である．まず南部・後藤作用は非線形で複雑なので，平坦に近い膜に対する近似的自由場の作用 (22) から出発する．M 理論では空間の次元は 10 ($d = 10$) である．したがって力学変数である埋め込み座標 X^i は 8 個 ($i = 3, \cdots, 10$) ある．

また M 理論は超対称性を持っているので埋め込み関数のパートナーであるフェルミオンが必要である．スピノールの次元はこのとき 8 となる．ボソンである埋め込み座標の数とパートナーとなるフェルミオンの数が等しいので，これだけで超対称理論が構成できるが，内部自由度や相互作用をどのように入れるのかが課題となる．

通常このような状況の場合にはゲージ対称性を導入することにより，相互作用を導入する．ただゲージ対称性を導入するためにはゲージポテンシャル A_α を余分な自由度として導入する必要がある．M2 ブレーンの場合は埋め込み関数とフェルミオンで自由度の数が釣り合っていることは既に述べたとおりであるので，ボソン的な自由度を持つゲージポテンシャルを導入してしまうと超対称性を保持することができない．

M2 ブレーンが定義される膜は空間的自由度が 2 となるが，この場合には特殊な作用（Chern–Simons 作用と呼ばれる）を考えることによりゲージ場に対する自由度をなくすことが可能である．Chern–Simons 理論についてここでは深くは触れないが，結び目理論などの数学と深い関係がある理論として知られている．

また，相互作用がある場の量子論を導入しようとすると**くりこみ可能性**と呼ばれる要請により相互作用の形が制限を受ける．空間次元が 3 の場合には許される相互作用はボソンとフェルミオンに対して X^4, $\Psi\Psi X$ などとなるので，ゲージ対称性を持つ作用としては行列の交換関係を用いて $\mathrm{Tr}([X^i, X^j]^2)$, $\bar{\Psi}\Gamma_i[X^i, \Psi]$ といった形に相互作用が決まってしまう．

一方 M2 ブレーンの場合は空間次元が 2 であり，くりこみ可能な作用はより非線形になって X^6, $\Psi X^2 \Psi$ などが可能な組合せとなる．行列の自由度を用いてこのような相互作用を書き下すのは自然ではない．

Bagger と Lambert は南部括弧式を用いたリー代数の拡張（リー 3 代数）を考え，これらの相互作用の形を決定していった．リー代数は行列の交換関係を用いて

$$[T^a, T^b] = f^{ab}{}_c T^c \tag{23}$$

のように定義される．このとき構造定数 $f^{ab}{}_c$ は交換関係に対するヤコビ則 (6) を満たしていなければいけない．リー 3 代数はこの概念を拡張したものであり，南部括弧式のような 3 重積を用いた交換関係式

$$[T^a, T^b, T^c] = f^{abc}{}_d T^d \tag{24}$$

で定義される．このとき構造係数 $f^{abc}{}_d$ は基本恒等式 (12) を満たすように決められる．

以上のような 3 重交換関係を用いると上で述べた膜上の場の理論の相互作用を自然な形に定めることができる：

$$\begin{aligned} &X^6 \to \mathrm{Tr}([X^i, X^j, X^k]^2), \\ &\Psi X^2 \Psi \to \mathrm{Tr}(\bar{\Psi}\Gamma_{ij}[X^i, X^j, \Psi]). \end{aligned} \tag{25}$$

これらの3重交換関係を用いた作用は適切に係数を選ぶと新しい形のゲージ対称性

$$\delta X^i = \Lambda_{ab}(x)[T^a, T^b, X^i] \cdots \qquad (26)$$

を持ち，さらにM2ブレーンの作用が持つべき超対称性を持つことが示された．これは大変画期的な発見であり，M2ブレーン上の相互作用が少なくとも部分的に理解できたことは大きな刺激をストリングの研究者に与え，南部括弧式が改めて脚光を浴びることとなった．

しかし，南部括弧式の量子化のところで述べたように，基本恒等式を満たすようなリー3代数の構築は非常に非自明であり，有限次元の場合には4個の生成子により作られる A_4 代数と呼ばれるもの（$f^{abc}{}_d = \epsilon_{abcd}$ となる）だけが可能な代数であることがまもなく理解され，Bagger–Lambert 理論の限界を与えてしまった．

いずれにしても Bagger–Lambert の理論は $N=1$ の場合には近似的に与えられる自由場理論に帰着するので，もともとの南部・後藤作用からみると，高次の相互作用項を捨ててしまっているという意味で未完成なものであり，まだまだ難しい問題が残されている状況である．結局南部括弧式の量子化の問題を何らかの意味で解決しない限り，M理論の完全な理解も難しい状況だと思われる．今後の新たなインスピレーションが望まれている段階である．

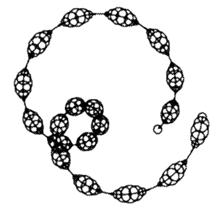
参考文献

1) Y. Nambu, "Generalized Hamiltonian dynamics", *Phys. Rev. D* **7**, 2405 (1973).
2) J. Bagger and N. Lambert, "Gauge Symmetry and Supersymmetry of Multiple M2-Branes", *Phys. Rev. D* **77**, 065008 (2008): 部分的な結果は独立に A. Gustavsson, "Algebraic structures on parallel M2-branes", *Nucl. Phys. B* **811**, 66 (2009) でも与えられた．
3) 「M理論の新しい定式化と南部括弧式」松尾泰，物理学会誌 2010年3月号．

（まつお・ゆたか，東京大学大学院理学系研究科）

特集／南部陽一郎

南部モード



坂東　昌子

1. 導入

2枚の写真がある．南部先生が京大の素粒子研究室で講演をされた後，懇親会を開いたときのもの（写真1）で，リラックスした様子の先生を中心に，若い人たちが周りを取り囲んでいる様子と，南部先生が議論されている写真である．1992年，当時の勤務先の愛知大学から1年間，研究に専念する時間を頂いた年だ．若手が，「南部さん」と呼びかけていて，「あら，私には南部さんとは言えないなあ」と思ったのを覚えている．素粒子研究室では，大学院に入った途端，「これからは研究という立場からはみんな平等だ」から，「先生」を使わず「さん」を使うように，と言われ，それに慣れてきた私も，さすがに，当時から，湯川先生が目の前におられるときは，やはり「湯川先生」と言っていた．同じく，南部先生にも「さん」とは呼ぶのは気が引けた．この論考でも，なかなか南部さんとか南部とは呼びにくいが，紙面の都合もあるので，ここでは「南部」で通すことにする．

南部には著名な仕事が数多くあるが，中でも，「対称性の自発的破れ」「素粒子のカラー自由度の導入」「超弦理論の展開」などは，どれも超一級の仕事である．ここでは，「対称性の自発的破れ」に焦点を絞りたいと思う．

2. 南部の自己評価

科学者には，思い入れた仕事と，評価は高くても自分で評価していない論文がある．南部が本当に評価しているのは何かを知れば，南部の科学者としての立ち位置がわかるだろう．南部論文選集*1)の序文を見ると，そこには，研究に対するシビアな評価がそこに明瞭に見えてくる．

2–1　ある温度以下になると今まで磁石でなかった物質がいきなり磁石になる（自発磁化）という不思議な現象を説明する模型（Ising model）は有名だ．それはいわば，お互いに異なった向きをもっている「まめ磁石」が，お互いに「同じ向きを持つような傾向になりやすい力」，つまり向きを揃えようとする相互作用が働いているというおもちゃの模型である．まめ磁石は，原子でもいいし，分子でもいいし，時には，原子や分子で作った団子でもいい．温度が高いと，まめ磁石はエネルギッシュで好きな方向を向いているが，温度が冷えてくると，隣どうしの相互作用の影響のほうが大きくなって，結局どのまめ磁石も同じ向きになる，つまりまめ磁石全体で大きな磁石になる．これが，自発磁化と言われる現象である．これは，物質全体はどの方向性も持たないし，相互作用も「同じ向きになりやすい」という傾向があるものの方向

*1)　"Broken Symmetry: Selected papers of Y. Nambu" Edited by T. Eguchi and K. Nishijima, World Scientific Series in 20th Century Physics Vol.13.

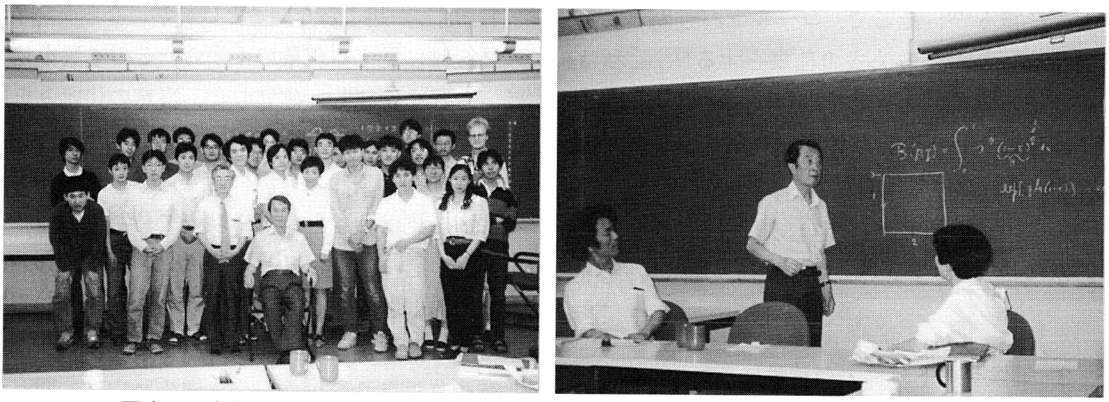


写真 1　京大素粒子研究室にて，南部さんを囲む会．右の写真では，南部先生が議論を持ちかけられ，九後汰一郎現基礎物理学研究所教授と私が拝聴している．

性はどの向きも同等なので，向きを変える変換に対して対象である（回転対称性）．イジング模型はこういうものだ．これを実際に数学的に解こうとすると，たくさんのまめ磁石の集まりだから，変数がたくさんあって難しそうだ．これをオンサーガーが解いてみせた．しかし，よくよくこの問題を考えてみると，「回転対称性」があるのだから，それをうまく使って解を見つける方法がありそうではないか．東大時代の南部は，「対称性をフルに使って解く」ことを試みたこの仕事を「私の最初のうまくいった仕事」と言うが（1947 年），論文になると思わなかったらしい*2)．このときすでに南部は，「対称性」という概念のもつ深い意義を理解していたようだ．当時他の仕事もしたが，自己評価は低く，欧米より遅れている日本を痛感した頃でもあった．

2–2　当時も博士の就職は厳しかった．その頃新天地，大阪市立大学に赴くが，その事情を「私が一番年上だったから」と謙虚に述べる．この時代は，宇宙線乾板で発見されるたくさんの新粒子をどう理解するか，ホットな議論と分析に，充実した楽しいときだった*3)．現象を見る目をここでしっかり養った．のちのフェルミとの出会いとともに，「order of magnitude thinking」，物事を大きく捉えて本質に迫る訓練にもってこいの環境だった．この成果は，南部が米国に移った後に，中野–西島法則として実るのだが，それに先駆けた南部たちとの仕事が下敷きになっている．

2–3　素粒子どうしが強い相互作用で複合状態を作る際の方程式，BS 方程式*4) やある種の近似をして解を求める論文は，日本の「素粒子論研究」に投稿しただけだったが，1968 年に英文にした．いくら単純な近似でも，しっかり物理の本質を捉えていれば，かえって簡単な計算で重要な手掛かりにつながるという信念につながる．このとき，式は簡単になってても対称性の本質が貫かれているかが大切なのだ．実際，のちにカイラル対称性の問題で大活躍する．南部は，「私は単なる数学的な美しさだけでは満足できない*5)」と言う．数学の威力を知り尽くしているが，それに満足しない，これが南部のもう一つの特徴である．

2–4　1952 年から米国プリンストン研究所に海外出張．当時は，研究所の黄金時代で，パウリ，パイス，ダイソン，ヤン，リーを初め錚々たるメンバーが活躍していた．しかし，南部は，当時の流行のテーマよりは独自の方向に目を向けて，多体問題や原子核構造に興味などに集中していた．

2–5　次に，ゴールドバーガーに評価され，シカ

*2)　“A Note on the Eigenvalue Problem in Crystal Statistics” これを評価し論文にするよう励ましたのは，伏見康治教授らしい．

*3)　On the Nature of V-particle I & II.

*4)　Bethe–Salpeter equation.

*5)　I was not satisfied with mere mathematical elegance.

ゴ大学に移る*6)．そこで，ゴールドバーガーたちと当時流行りの分散公式の仕事をする*7)．「私はただ最初の頃にアイデアを出しただけだ」と言うが，当時いろいろ流行りの面白いテーマがあったのだが，それだけでは満足できなかった．そして，画期的な出会いがあった．かくして「対称性の自発的破れ」への重要なステップを踏み出したのだ．

3. 気候ゲート事件と対称性

地球の温暖化に関する関心は，1990年代から増え続け，ノーベル賞までとり，100年先の地球の平均気温を予測したシミュレーション結果を出したIPCCを知らない人は少ないだろう．現実にも，最近の地球の平均気温が急激に上昇している様子は，ホッケースティックグラフという有名な形で表されている．実際には，種々の測定法で測り，その平均を出す．ところが，今回，樹木の年輪による気温が上昇しているどころか下降していた（「Keithの年輪データ」）．これではまずいと，trickを施して発表したというもので，この間のメール上の議論が，2009年11月に漏えいし大騒ぎになった（気候ゲート事件）．日本でもやっと最近論議されるようになってきた．

私は最近，これに関する議論を垣間見る機会を得た．一つは，権威ある学者の集まりが組織したシンポジウムで，もう一つはジャパンスケプティックス学会のこじんまりした討論会である．後者は大変ホットな議論が展開され，本音で語れる会だった．今，科学と科学のあり方，科学者の組織のあり方について，その底流で変革の波がひたひたと押し寄せていることを感じる．私は，気候ゲート事件をここで論じるつもりはないが，気になる発言を耳にした．前者のシンポジウムで，「気候変動は，一度しか起こらないので検証できない．ですから難しいのです」というプロの科学者の発言だ．

「一度しか起こらないことは科学にならない？」，一見複雑に見える現象の中から，その本質を見分け，それを検証し，確立して，自然の仕組みを解明してきたのが，科学の歴史である．少なくとも，物理学は，こうして自然に切り込み，単純で明快な法則を見出してきた*8)．我々の住む宇宙の歴史も，超新星の爆発も，りんごが木から落ちるのも，あなたの経験も私の経験もどれも1回きりしか起こらない．なかんずく，この宇宙は一つしかないし，繰り返されないから，人間の歴史は一回しか経験しないから，天候も同じことは2度と起こらないから，検証できない？

1度しか起こらない現象を検証できないとしたら，到底科学なんて営みはあり得ないではないか．気候温暖化の中枢部がこんな姿勢では，科学の権威はどこにあるのか．もっといえば，あらゆる現象は1回きりしか起こらない．時間は逆戻りできないから，あの実験もこの実験も，あるときある場所で行った実験は，いくら似ていても，絶対に1回きりしか起こらない．そこの中に潜む共通のもの，「いつでもどこでも」見られる自然の仕組みを見つけ出すことこそが科学の営みである．あなたに起こったことが私にも起こる，そういう客観性があるからこそ，我々は自然の仕組みを解明できたのである．「対称性」とはこういう大切な概念を表す羅針盤である．全く同じであるなどと非現実的なことを要求する必要はない．偶然の要素をより分けて複雑な現象の中に潜む同じ法則がきちんと成り立つことを確認すればいいのだ．

「いつどもどこでも誰でも」に成り立つ仕組みを見出すには，時間や空間をずらしたり，あなたと私を入れ替えたりしても，変わらない法則を見つける為の素晴らしい道案内，これが，対称性の大切なところだ．南部が対称性の道案内をしっかり見据えて仕事を進めたこと，しかも，それを数学の厳密な言葉で表現したこと，このぶれない科学

---

*6) どうしてアメリカに残る気になったのかなあ．

*7) これはCGLN（著者の頭文字をとっているが）として有名でありみんな当時は勉強したものである．のちにマンデルスタムがさらに発展させ，大流行したテーマであった．

*8) もちろん，それは，できるだけ偶然の要素を排し，できるだけ理想的な簡単明瞭な環境を用意し，そこで繰り返し繰り返し，確かであることを確認した仕組みもあれば，まだ，ある環境でのみ確かめられた仮説に近いものもある．

素粒子界のヨハネ

アメリカから帰国した日本人は，以前よりアグレッシブになる．海外に行くと，日本人のように引っ込み思案ではだめだと痛感するからであろう．ところが，アメリカで少し生活してみた頃，「この国でも，やはり本当にいい物理屋さんは，いくら控えめでも，尊敬を集めるのね」としみじみ言ったら，「そうだよ，南部のように…」と皆，異口同音に言う．先生はみんなの尊敬を集めていたLee博士が交通事故で急逝されたとき，ある若い院生が途方にくれていたら，「彼ほど力はないけど，私でよかったら指導教授になりますよ」といって手をさしのべられた．これだけの業績を持ち尊敬されているのに，人一倍謙虚なのだ．素粒子のヨハネと呼ばれている．そして誰もが「なんで南部はノーベル賞をもらわないのだ」と言っていた．

的思考法を「南部モード」と名付けてもいいのではないだろうか．物理学は，基本に立ち戻って物事を単純化し，エッセンスを取り出し，数学の助けを借りてやり遂げる方法を獲得したのだ．

4. ゲージ対称性

いつでもどこでも見られる仕組みを数学として表すとき，我々は，時間軸や座標軸を変換したり，左右を入れ替える変換をして眺める．この「変換」が大切なのだ．変換に対して不変な量が物理量である．それは，いつでもどこで見ても自分の立場に依存しない客観的な量である．数学で言えば不変量を見出すことが大切になる．

変換についてより深く突き詰めてみると，自然界全体に一挙に施す変換はグローバル変換と呼んでいるが，いわば絶対権力者の仕業と言える．もっと自然な変換は，小さな部分の変換（局所変換）である．これは「地方自治の原理」*9) と言ってもいいが，ある局所的な領域（地方）で変換を施す（変革を起こす）とき，それは周りに波及効果を及ぼす．ちょうど，水面で，ある部分をかく乱すると波が周囲に広がるイメージである．局所変換をゲージ変換と言うが，このとき広がるのがゲージ粒子と呼ばれ．ゲージ粒子は，生み出した点（点源）から空間に一様に拡散するので，点源から距離 r だけ離れたところ（表面積は $4\pi r^2$）では r^2 に反比例して密度が減少する．したがってそこに荷電粒子をおくと r^2 に反比例した力（クーロン力）を受ける．見方を変えるとゲージ粒子が点源から飛び出し，拡散してまわりにゲージ場を作る．数学を使って計算すると，ゲージ粒子の質量はゼロであることも示せる．つまり，次のような関係がある．

> ゲージ対称性 ⇔ ゲージ粒子の質量がゼロ
> ⇔ クーロンの法則．

最初にこのイメージをもったのはファラディだが，彼は見事に電磁場に対して，空間にゴムが満たされている描像をもっていた．さらに数学を使って完成させたのが，マックスウェルで，電気と磁気を統一したのだ．そこにはゲージ対称性が見事に成立していた．マックスウェルの電磁気学は，目に見えない光，空間を飛び交う電磁波（光子）というゲージ粒子の存在を予言した．1世紀を経た後，目に見えない電磁波が周りに満ち満ちていて，ラジオやテレビ，そして携帯電話を誰もが持つなどと，誰がそのとき予想できただろう．

ゲージ対称性の透徹した論理から導かれた電磁気学に魅せられた物理学者たちは，電磁気だけでなく，この世界のすべての相互作用の起源は，ゲージ対称性にある，つまりゲージ原理がこの世を支配している法則だと，胸をときめかした．そういえば，重力はクーロン力と同じ振舞いをしている．そして，後に発見された強い相互作用や弱い相互作用も，ゲージ原理が成り立っているはずだと，できるならこのゲージ原理に導かれた相互作用で説明したいと，夢見ていた．

*9) 中野博明・坂東昌子『四次元を超える時空と素粒子—隠された次元』現代物理最前線〈5〉，共立出版．

5. ゲージ原理への疑問

20 世紀，科学の流れは，ニュートン力学と電磁気学の探求から，さらに原子の世界を司る法則の探求へ，量子力学と相対性理論へとその歩みを進めた．どちらも対称性原理を徹底的に駆使して構築された枠組みである．

学問の先端の地から遠く離れた日本で，若者たちが，始まったばかりの科学の世界に胸をときめかせ，原子の中に入り込み，そこに何があるのか，どういう仕組みがあるのか探っていた．

ところが，原子の内部で主役を演じる素粒子の相互作用は，既知の相互作用に比べてはるかに近距離である．原子の真ん中にある原子核が陽子と中性子からできていて，原子核の大きさはおよそ 10^{-15} m，この狭い領域に陽子や中性子が結合している力（核力）の正体をめぐって素粒子論は大揺れに揺れていた．そうこうしているうちに，新素粒子がどんどん見つかり，素粒子の種類もその間に働く相互作用も，整理されてきて，核力という強い相互作用だけでなく素粒子の崩壊に関与する弱い相互作用との 2 種類あることがわかった．どちらも短距離でしか働かないので，明らかにクーロン力とは性質が違う．そうすると，ゲージ原理はうまく働かないのか？

ゲージ対称性は捨てざるを得ない，強い相互作用には，今までのゲージ理論は役に立たない，というが圧倒的多数の意見だった．

湯川は，ゲージ理論をお手本にしながら，相互作用を担っているのはゲージ粒子ではなく，質量をもつ粒子（π 中間子）だと予言した．

> 短距離相互作用
> ⇔ ゲージ対称性がない
> ⇔ 質量を持つ仲介粒子（π 中間子）．

見たこともない粒子が存在するという過激な予言は，まもなく的中し，π 中間子が発見された．素粒子の相互作用についての，画期的な出来事だった．

6. 湯川モード，ディラックモードとアインシュタインモード

1985 年の京都国際会議場で開かれた「中間子論 50 周年記念国際会議」（MESON50）で，南部は，「古い枠組みをしっかり使って新しい粒子を導入する」という科学の推理の仕方，革命的なやり方を「湯川モード」と名付けた．講演のタイトルは「Direction of Particle Physics」，それまでの素粒子論の発展を振り返りながら，2 つのモードを比べた講演に，聴衆は聞き入った．湯川モードは，伝統的なゲージ理論を土台にしているという意味で保守的ではあるが，同時に伝統の枠を越え，新粒子を予言させた．これに対してディラックモードは，理論の数学的構造を緻密に追求すると，自然に新概念に行き着いてしまうというものだ．電子の運動方程式を，対称性をしっかり維持しながら緻密に追っていくと，電子と対をなすプラス電荷をもつ陽電子の存在が導かれてしまう[*10]．また，「電荷はプラスとマイナスがあるのに，磁荷は N 極と S 極がいつもくっついてしか存在しないのは不思議だ．電気と磁気の間の見事な対称性があるので，単極（モノポール）があるはず」だといった．尤も，モノポールのほうは，いまだに見つかっていない．見つかったら大騒ぎになるだろう．

南部は，1988 年，日本で開かれた国際会議（国際学会の中でも高エネルギー分野では最も大規模なものの 1 つ）で，「アインシュタインモード」を付け加えた．この解説を，南部が一般向けに講演した易しい言い方で引用させていただく（「ひっぽしんぶん」8 号，ヒッポファミリークラブ発行，2003 年 3 月 1 日発行，2008 年には再録されている）．「理論屋が研究するやり方には 3 種類ある．一つは

*10） 電子と同じ質量を持つはずの陽電子は，なかなか見つからなかった．「見たこともないものをあるなどとは不謹慎」と実証主義で鍛えられた欧米の科学者たちは言った．不思議なのは，ディラックのような論理明晰な天才でさえ，ときには誤る．「陽電子は，今ある陽子ではないか.」と思った，しかしプラスの電荷を持っているが質量は電子に比べておよそ 1840 倍，だから対称性は成り立たない」ので，何か屁理屈をつけようと考えていたそうだ．まあ，結局は見つかってめでたしめでたしだったが．

シカゴ大南部研究室にて

シカゴ大学におられる南部先生を訪問したときのことである．ちょうど交通流理論を始めた頃だったので，セミナーでは交通流か素粒子か，どちらの話をするかご相談した．「両方やったらどうですか」と言われたので，急きょ，交通流のシミュレーション実験も録画したビデオを使うことにした．地下室に収納してあったビデオデッキを，南部先生が自ら運んでくださり，恐縮したことを覚えている．写真は，シカゴ大学の先生のお部屋を訪問したときに友人がとってくれたもの．



写真 2　シカゴ大学を訪問したときの南部先生のお部屋で（南部先生と私）．

「湯川型」．新しい現象に出あったとき，その背後には新しい何かの粒子があると考え，その数式を見つけるんです．湯川秀樹さんの場合は，新しい粒子「中間子」があると言ったわけで，そういった途端，以降何十年にもわたって，本当に次から次に色々な粒子が見つかってきました．その考え方は何十年も我々の頭の中に定着していて，我々の考え方の基礎になっています．現象からのボトムアップです．2つ目は「アインシュタイン型」．こちらは湯川型と正反対で，トップダウンです．まず，理論をつくる．こういう理論があるから実験でこういう「何か」が出てくるはずだと言う考え方です．例えばアインシュタインは，重力場の理論をつくって，空間が曲がっていると言った．曲がっているから，こういうものが出てくる，と言ってそこで予言したものが実際に見つかってきています．3つ目は「ディラック型」．ディラックと言う人は，「自然の法則は美しくあるべきである」と言う考えを貫いていたんです．つまり，数学的美的観念から数式を作りだしてしまう．すると実際にその数式にあう現象が存在することが見つかるのです．ディラックが作った数式のひとつに「モノポール（単磁極）」を示すものがありますが，これはまだ実際には見つかっていない．そこで現在多くの物理学者がモノポール探しをしているんです．もしかすると，私達の周り，この辺りにウヨウヨしているかもしれないですよ．」

この説明は，易しい言葉で書かれているが，ピンとこないところがある．そう思うのは私だけだろうか．それは本当に必要な南部モードというのを導入しない南部の謙虚さのせいではないか．

7. 謎解き

今一度，2節からの続き，1960年代の南部に戻ろう．素粒子の間に働く相互作用にはゲージ理論は働かず，ややこしい．湯川理論も画期的ではあるが，結局，ゲージ原理は捨てるのだ．南部は，そこが腑に落ちなかったのではないか．結局，素粒子の世界を支配する強い相互作用も弱い相互作用も，ほぼ1世紀前に打ち立てられた殿堂，ゲージ理論では理解できない．いったい我々は何を頼りに理論を構築すればいいのだろう．1950–60年代は混乱期の真っ只中であった．分からないから，わくわくするのだが，矛盾が解けないので，歯がゆい気持ちと力不足を痛感する．果たして南部は，この状況をどう見ていたのか．

シカゴ大学にいた南部は，その頃，Bob Shrieffer（当時，イリノイ大の院生だったらしい）のセミナーに出る機会があった．有名なBCS理論の著者の1人で，論文が出る少し前だったそうだ*11)．

*11)　原子分子の多体集団が示す超電導現象の謎，すなわち，温度が下がりある温度（臨界温度）に達すると，伝導体の抵抗がゼロになるという現象である．性格が突然変わるこの現象

普通なら「素晴らしい！」と思うところだが，実は，南部はこれに満足しなかった．そこにある矛盾にひっかかった．超伝導を起こす原子の集まりは，紛れもなくゲージ理論に導かれた電磁相互作用で支配されている．そこではこのゲージ対称性の１つの証である電荷の保存が成り立っていなければならない．BCS の計算では，電荷が保存しないのである．言い換えれば，もともとあるはずの対称性が破れているのだ．おかしいではないか，と思った．まず，ここまでは，他の科学者も少し見える人には分かっていたことだ．しかし，南部のすごいのは，それを徹底的に追求したことである．幸い，Bob もその後シカゴにやってきた．

私の残った部分は，この謎解きに当てる*12)．南部の透徹した論理が何を導き，どう矛盾を解決したのだろう．

素粒子の間の強弱相互作用は，さておき，BCS の計算では，電磁気学が基本であるから，ゲージ対称性は厳然として存在する．なのに，計算を進めていくとゲージ対称性が破れるとはどういうことか？ 電磁気学の計算では，一部の計算だけの結果ではゲージ対称性は成り立たないことが多い，そのときには，どこかで見落としがあるはずで，きちんと全部を考慮すると，計算が間違っていなければゲージ対称性が反映されているはずなのだ．では，それが破れているとはどういうことか．この論理を詰め切ったとき，「対称性の自発的破れ」の仕組みが見えてくるのである．「対称性の自発的破れ」などと言うと，対称性が成り立たないと思う人が多いが，実は，対称性という原理は貫かれているのが特徴である．ただ，その現れ方が，違うだけである．南部は，それを３つの特徴で示した．

① 最も安定な状態（基底状態）が複数ある．
② 質量ゼロの粒子，NG (Nambu–Goldstone) 粒子が出現する．
③ ゲージ粒子が質量を持つ粒子 (プラズモン) になる．その結果，遠距離のクーロン型から短距離のいわゆる湯川型になる．

BCS 理論で満足せず，そこまで徹底的に確かめたのである*13)．そして，ゲージ対称性に対する原則的立場を厳密に維持しながら，それまでのゲージ理論に，さらに新しい様相が，現象として現れることを，厳密に証明した．そして，そのとき，新しい粒子，NG 粒子が出現することを示したのである．この新展開によって，南部は，これをいろいろな方面から検証する．例えば，BCS 理論の相対論的バージョンなども考えた．何か本物があると思ったら，その先は，多少荒っぽい近似でもモデル計算してみることも試みた．ノーベル賞対象論文（NJL）は，当時院生だったジョナ・ラ・シーニオと一緒にフェルミオンの動力学を簡単な模型で荒い近似で計算したものであって，応用編と言ってもいい．南部の最も優れた業績は，透徹した対称性の論理から得られた画期的な相転移のメカニズムの発見だというべきではないか．

8. 南部モード

まさに，物理学の真髄に迫る展開だ．ノーベル賞対象論文より，こちらのほうがよほど画期的だ．「対称性の自発的破れ」という仕組みは，自然の大原理は厳密に維持しながら，現象として現れるときには，豊富な形態があり得ることを示したのだ．湯川をはるかに超えた見識だ．ノーベル賞の対象になったNJL 模型より前の，謎解きの答は思いがけない新しい展開をもたらした．目の前が開けたのだ．そして今では，強い相互作用も弱い相互作

は，一般に「相転移」と言われているが，今までの常識を破る予想外の出来事だった．南部の初期の「自発磁化」現象とよく似た現象である．この謎を見事に解いたのが，Bardeen, Cooper and Shrieffer（BCS）の論文である．

*12) 紙面の都合で，この後の南部の経歴は省く．ここまでで南部の精神のエッセンスが実に見事に磨かれていたと思う．そのあと，たくさんの仕事をするが，自己評価の低いと思った仕事は，論文にしていないことが多い．「南部先生は，たくさん惜しいことをしてしまいましたね」と言うと，「惜しいことがたくさんなければだめですよね」と言われたという話を江口徹氏から聞いた．普通の物理屋は，何か見つけたら必ず論文にまとめるものだが….

*13) 数学の群論の言葉を使えば，群の表現論に当たる．素直な対称性の表現は「線形表現」，対称性が自発的に破れた表現は「非線形表現」として定式化されている．

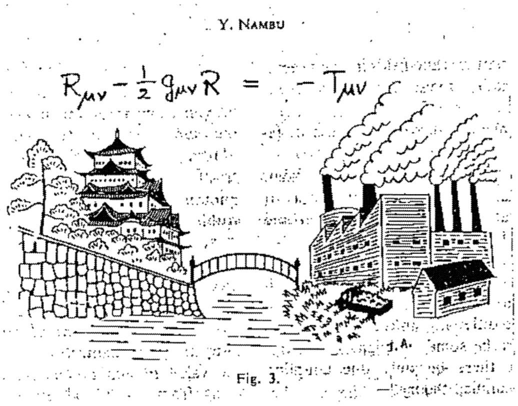


図 1　1978 年高エネルギー国際会議（東京）における南部の Concluding Remark で使われた絵，左に城，右に工場が描いてある．当時，先生の講演準備のお手伝いをしていた荒船次郎氏（元東大宇宙線研究所長：素粒子物理学，東京大学名誉教授）は，「左辺は美しく，右辺は美しくない絵を何か描いてほしい」と言われた．「私の無い知恵を絞って描いたもので，元々のアイディアは南部先生のものです．南部先生に絵を使っていただいて光栄なことでした」とは荒船氏の談．

用も，ゲージ原理から導けることが明らかになっている．ただ，現れ方が南部の仕掛けが働いていただけなのだ

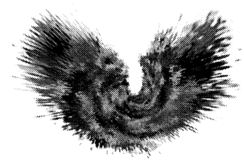
ここには，2 つの要素がある．一つは，自然法則の根本を探る態度だ．南部の言葉を借りると，「なるべく広い範囲でモノを見ること，そして，人の話をきくことが大事です．どうしても専門的になる傾向にありますが，意識的にそうならない様，努めています」．もう一つは，素直な感覚を持ちつつ，数学を駆使できる力量である．しかし，南部はまた，こうも言う．再び，「細かい計算をしていると頭がこんがらがってきますから，そんなことはコンピュータとかでやればいいんです．細かい計算をしているときには，大局を見ることができない．そこだけしか見えていないですからね.」

1988 年の国際会議の講演で南部が描いた絵（図 1）があるが，右側はごたごたしていて現実の世界，左側は美しい世界である．これを＝で結んでいる．橋渡しをしているのは，実は南部ではないのか？ とふと思う．現実がごたごたしていればいるほど，手に負えなくて「そう簡単にはわからん．専門家に任せよう」というのは，物事のエッセンスを抜き出して本質を見抜くことを放棄したいい方だ．偶然起こる要素を取り除き，大枠だけを見つめると，見えてくることがある．時には論理だけを頼りにする数学を駆使して先を案内してもらう必要もある．が，大切なのは，その人の持つ自然界を見る目である．こう思ってこの図を見ると，意味深長である．対称性の原理がそこにあるのだ．

謝辞：これを書くにあたって「南部モードについて書いたら？」とアドバイス下さったのは藤川和男氏（日本大学理工学部教授，素粒子物理学：元東京大学理学部教授）である．ここにお礼申し上げる．

（ばんどう・まさこ，知的人材ネットワーク あいんしゅたいん）

南部先生との思い出



江口　徹

私が南部先生に初めてお目にかかったのは1974年の夏にシカゴ大学にポスドクに採用して頂いたときのことです．それ以来シカゴ大学で長く研究をさせて頂き，また私が日本に帰ってからも親しく交流させて頂きました．南部先生のように真に傑出した物理学者と知り合いになれたことは研究者の道を進んだ私にとって何物にも替え難い幸運であったと思います．

南部先生との思い出の一つに，先生の論文選集を西島和彦先生と一緒に編集・出版したことがあります．当時，私は南部先生の主要な論文はかなり徹底して勉強しているつもりでいましたが，どの論文を選ぶかについては価値判断が入ってくるので南部先生と考えが一致するかどうか気にかかりました．一応2人で別々に掲載する論文のリストを作ってみましたが，比べてみるとリストの多くの部分が一致しました．私は先生の仕事をご自身の評価を含めておおむね正確に理解しているのではないかと感じてうれしい気持ちになりました．

この論文選集は『Broken Symmetry』というタイトルでworld scientificから出版されましたが，Spontaneous symmetry breakingのアイディアが初めて発表されたPurdue大学の会議録や，有名な弦理論の南部作用が出てくるCopenhagenの講義録などはpreprintをタイプし直して読みやすいものにしました．また本の序文を西島先生にお願いしましたが，Zuminoの有名な言葉が出て来る文章は格調の高い英語で書かれており広く知られるようになりました．

南部先生が独創性と先見性において世界の並みいる研究者の中でも特に際立っていることは良く知られていますが，先生はオーソドックスな理論物理学の枠からはみ出すような試みにも強い関心を持っておられたと思います．弦理論の南部作用を発見したベネチアノ・モデルの研究なども今から見るとやや際どいようなところがあり，南部先生のようなestablishした研究者は通常は手を出さないようなテーマではなかったかと思います．しかし，先生は無限成分波動方程式などを研究しておられたところから，自然にベネチアノ・モデルに興味をもたれ振幅のfactorization conditionの研究から1次元媒質，弦の運動がその背景に存在することを見抜かれました．

また，座標と運動量が対になって現れる力学系を3つ組や4つ組などに拡張した南部力学などは異端的な色彩が非常に強いものだと思います．しかし，最近になって南部力学は超弦理論におけるM5ブレーン上の力学などに関連して多くの関心を集めるようになってきました．

南部先生は傑出したアイディアをいわば湯水のように生み出されてきました．Spontaneous symmetry breakingやカラー・ゲージ理論などそのい



南部先生ご夫妻，ウイスコンシン州，ジュネーブ湖，1980 年.

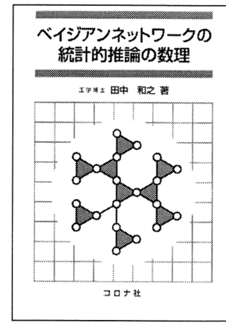
くつかは現在の素粒子の標準理論の根幹の位置を占めています．しかし，先生の仕事であることが必ずしも確立せず，後から同じ仕事をした別の研究者の仕事とされている研究も少なくありません．ベーテ・サルピーター方程式，イジング・モデルのフェルミオンによる解法，分散理論のマンデルシュタム表示などがあります．いつか先生に「先生はずいぶん損をされていますね」と伺うと，「認められる仕事もあるのだから，認められないものがあるくらいが良い」という返事でした．QCD の原型になったカラー・ゲージ理論の仕事で先生はクォークを整数電荷に選びました．このとき，クォークを分数電荷のままにしておく可能性もあることは良く分かっていたわけですが，あえて分数の可能性については論文で触れなかった．「これは損をしたかな．どちらの可能性もあると言っておいた方が良かったかも知れない」とあるときに半分冗談で言っておられました．あえて整数電荷にこだわったのは，クォークが数学的な仮想的なものではなく自然界に実在する粒子であると考えたかったからでしょう．この辺りは日本の素粒子論の伝統である湯川・坂田哲学に強い影響を受けておられたことを感じさせます．

先生はどこかで「数学的な美しさだけでは駄目で物理に成っていないといけない」ということを言われたことがあります．数学的な側面が強く出ている超弦理論など現在の素粒子論を先生がどのように評価をされているのかは少々気になるところです．しかし，現在の数学的な流れは量子論的重力理論を作るための内在的な要求から生じているところが強く，こうした事情を慧眼な先生はとっくにお見通しなのではないかと思います．

南部先生にはこれからもお元気で，いつまでも我々の導き手であり続けて頂きたいと思います．

（えぐち・とおる，京都大学基礎物理学研究所）

ベイジアンネットワークの統計的推論の数理



田中和之著，A5 判，272 頁，本体 3500 円，コロナ社

確率的推論と統計力学に関する入門書である．

例外や雑音を含む知識を確率で表現する確率的知識情報処理には，現実のデータからパラメータやモデルを推定する統計的学習（帰納）と，確率論の公理に従って確率を計算する確率的推論（演繹）の，2 方向の情報処理がある．本書では，「統計的推論」というタイトルがついているが，確率的推論に相当する問題を扱っていることになる．すなわち，有限個の確率変数について，その中の一部の確率変数の分布を計算する情報処理になる．統計的学習に関する記述は含まれていない．また，ベイジアンネットワークは，確率的知識の一表現形式であり，確率変数を頂点で，それらの依存関係を有向辺で表現する有向非巡回グラフである．

確率論の公理といっても，確率が非負であること，全体集合の事象の確率が 1 であること，排反な事象の和の確率がそれぞれの事象の確率の和になるということでしかない．また，本書は，誤り訂正符号や隠れマルコフモデルなどの応用を想定していて，各確率変数は有限個の値をとることを仮定している．ただ，問題は一筋縄ではない．そもそも，確率的推論は，NP 困難問題である．本書では，SAT が近似的に解けるという応用事例も扱っている．一般的な確率的推論の厳密解が，多項式時間で解ければ，P ＝ NP となってしまう．菊池良一，守田徹といった日本人の物理学者は，NP 完全理論が形成される以前から，そのような計算困難な問題（分配関数の計算）の存在を認識し，確率的推論の代表的手法である確率伝播法の原型となる方法を提案していたという．

2008 年の秋に仙台で開かれた研究会で，田中和之氏から，「ベイジアンネットワークの確率的推論の練習問題を多数作成している」という話を伺った．そもそも，ベイジアンネットワークの確率的推論に関しては，以前は，学会のチュートリアルの講演や大学の講義などで，いくら丁寧に説明してもわかってもらえないものであった．本書の最大の利点は，初学者にもわかるように，非常に多くの例題を取り入れ，懇切丁寧に一から説明している点にあると言ってよいであろう．定理の証明などほとんどなく，例題を追えば，数学や物理の知識などなくとも，容易に理解できるような構成になっていて（本書の 7 章まで），苦心の後がうかがえる．また，本書の 8 章から 9 章にかけて，確率的推論と統計力学との関連，特に平均場近似，ベーテ近似について，統計力学に詳しくない読者でもわかるような説明が施されている．

そもそも，確率伝播を初めて学習する人などは，ベイジアンネットワークの有向辺の方向とメッセージの伝播する方向を混同してしまい，理解が難しくなることがある．そのような反省から，ベイジアンネットワークを使わない確率的推論の説明が主流となってきている．本書でも，確率分布を因数分解した関数たちと確率変数たちを頂点とする無向グラフで表現する，因子グラフと呼ばれる方法を紹介しているが，確率伝播法の原理を因子グラフで説明すれば，読者にとってもっとわかりやすくなっていたと同時に，紙面も若干圧縮できたのではないか．その点だけが悔やまれる．

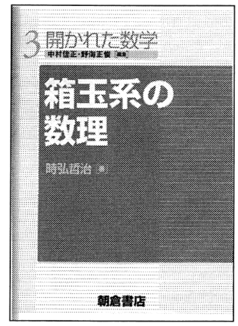
また，ベーテ近似と，クラスター近似（菊池近似），接合グラフ（接合木も含む）近似との関係など，若干アドバンストになるが，確率的推論に関する専門書ということをうたうのであれば，そのような解説があってもよかった（因子グラフから領域グラフを構成し，その上で確率伝播法を適用することになる）．その意味で，網羅的ではないという点は否めないが，拙書『ベイジアンネットワーク入門』（培風館）など，アドバンストなテキストや解説論文はいくらでもあるので，そのような読者はそちらへ進めばよいと思われる．

私自身，2002 年から 2006 年まで，田中和之氏が代表者をつとめていた，科学研究費特定領域研究「確率的情報処理への統計力学的アプローチ」で勉強するように言われ，よく足を運んだものであった．本書をじっくり読んでみると，そのときの田中和之氏の熱弁が思い浮かぶ．ベイジアンネットワークや確率的推論に興味をもってもらい，一人でも多くの若い研究者を呼び寄せたいという，田中和之氏の願いがそのまま書籍として出版されたと言ってよい．

鈴木　譲（大阪大学大学院理学研究科）

箱玉系の数理

時弘哲治著，A5 判，192 頁，本体 3200 円，朝倉書店



本書は箱玉系というちょっとおしゃれな名前のついた時間発展系についての解説書である．著者は誰あろう，この系を愛し，系と格闘し，系を究めることでは右に出る者がない箱玉オタクの時弘哲治氏である．

皆さんは箱玉系をご存じだろうか．もしご存じなければ，書店に寄って本書の 27, 28 ページをご覧いただきたい．たちどころに何であるかは理解いただけるものと思う．と書いているスペースがあったら説明したほうが早い．ずらっと横一列に並んだ箱に何個かの玉を入れ，左の玉から順に右側の最も近い空箱に移していくことを繰り返す，という系である．まあ，もう少しだけ文言を追加しないと不明なところがあるが，それは本書に任せるとしよう．

箱玉系は一人遊びに属するゲームとも言える．ルールをうまく教えれば，小学校低学年，いや，幼稚園年長さんぐらいでも遊べるのではないだろうか．たったこれだけの遊びで一体何の数学があるのだろうか．そう思われたら，もう一度書店に戻ってパラパラと最後まで眺めてほしい．現代数学のオンパレードを目にされることであろう．

最初の章から概括しよう．まず第 1 章でセルオートマトンという 2 進デジタル系の紹介があり，Wolfram の研究や Conway のライフゲームを解説している．おっ，デジタル系の話なんだなと思って第 2 章に入ると，がらっと話題が変わってソリトン方程式，例えば KdV 方程式や戸田格子方程式についての解説がある．実はこの 2 つの章は第 3 章での箱玉系導入のための布石である．

評者が推測するに，毎年世界中の子供たちのうち百名ぐらいは，徒然なるままに上記の遊びをふと思いつき，30 秒ほど遊んだ後にふーんと言ってもう忘れてしまうのではなかろうか．惜しい！ もしセルオートマトンとソリトンをご存じだったなら，感動を味わえたものを…という冗談はさておくが，箱玉系はあまりに簡単であるがゆえ，いきなり紹介してもその価値はなかなかわかってもらえないであろう．最初の 2 つの章によって箱玉系の面白さ・深さを知るために必要な知識が与えられるのである．

さて，第 3 章はいよいよ箱玉系の紹介であり，デジタルかつソリトンという 2 つの特徴をあわせもった系の姿が具体例とともに示される．しかし，ソリトンをご存じなら，有名な KdV 方程式あたりの偏微分方程式すなわち全変数連続の系を思い浮かべるのではないだろうか．全変数デジタル？ 一体これはどういう系なのだろうか．

その答は，ソリトン方程式の変数を順に離散化していく過程を述べた第 4 章から第 7 章によって明らかにされていく．1960 年頃から現在に至るまでのソリトン理論の急速な進化の道筋の一つでもある．無限種類存在するソリトン系はその全体を KP 階層（第 4 章）と呼ばれる数学的に大変ガッチリした構造によって明示的に支配され，それゆえ公式や定理のオンパレードであり，変数が連続であろうが離散であろうが統一的な観点から議論ができる．離散 KP 方程式（第 5 章）であろうが，超離散 KdV 方程式（第 6 章），超離散戸田方程式（第 7 章）であろうが，要するに同じなのである．ん？ 超離散？ そう，実はこの超離散という過激な言葉こそが，離散化の最後の関門であった従属変数の離散化をなし遂げ，箱玉系が由緒正しいソリトン系であることを解明した魔法の鍵なのである．

第 8 章は筆者の研究グループが追求に追求を重ねている箱玉系の周期性についての章であり，ゼータ関数やリーマン予想が飛び出してくる．そして第 9, 10 章では可解格子模型，Yang–Baxter 関係式などによって箱玉系が語られ，量子可積分系や統計物理への深いつながりを紹介して本書は終わる．

出てくる用語が難しすぎて躊躇なさっておられる？ そのときは時弘氏に講義していただくのが一番である．氏はわかりやすい文章とともに語りのうまさでも有名であり，箱玉系を述べるときの氏の様子は花を愛でるがごとくである．その情愛を明晰な文章で綴った本書はまさに待望の一冊であり，つながって拡がる数学の面白さを知る格好の機会を与えてくれている．

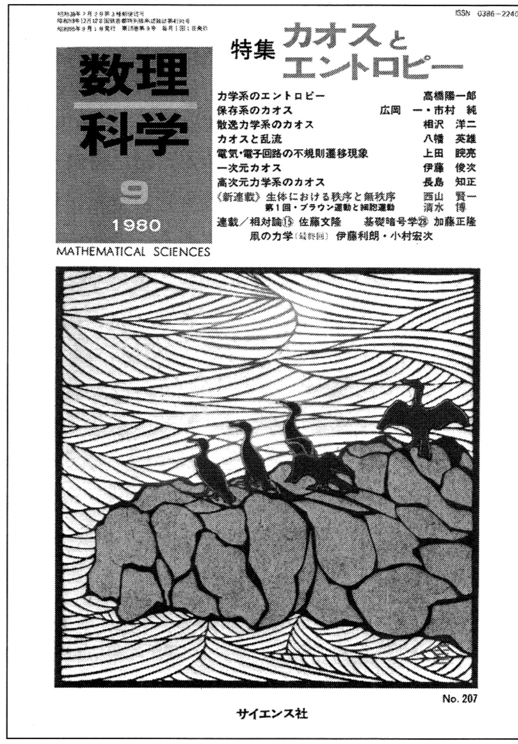
高橋　大輔（早稲田大学理工学術院）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

高橋　陽一郎

1980年9月号



1978年にDavid Ruelleの講演を聞いたのが私にとっての「カオスとの遭遇」であった．統計力学の数学的研究のリーダーである先達にBBGKY hierarchyの導出に関するささやかな結果を聞いてもらおうと参加した研究会での出来事であった．

研究会の開催場所は名古屋大学プラズマ研究所（当時），そのテーマは乱流発生のメカニズムであった．乱流は（準周期運動の）モードが次々と励起され，無限のカスケードを経て生じるというランダウの描像がそれまでの常識であった．しかし，小自由度の系でもランダムな現象が起こり得ることにプラズマ物理の方々が着目されて企画された研究会であった．

カオスは，統計物理学や電気工学を始めとする諸分野の方々にもそれぞれのインパクトがあったであろうが，私にとってはそれ以上に，わかったような顔をして講義していた常微分方程式の解の振舞いが実はわからないものだという事実がショックであった．それからの数年間，力学系のカオスの問題にのめり込む．

自分のやろうとしていることが数学か物理か他のものかもわからずに無我夢中で取り組んでいると，予期せぬ同志との出会いも数々あるものである．また，ポアンカレ以来の数学の蓄積を再認識し，その10年ほど前のβ変換に関する研究も役に立つことになった．

本号の特集「カオスとエントロピー」は当時の到達点をよく表している．筆者のお一人の上田睆亮先生は1961年，大学院生のときに非線形振動でカオス（その後“broken egg”と命名）を“目撃”されたが，ある数学者から「長周期運動であろう」と否定され，発表を控えられた．カオス発見者の栄誉をLorentzに譲る結果になったのは残念であり，また，諸分野の研究と向き合おうとする数学者の見識の問題として心に留めるべきことである．が，いまはもう遠い過去の苦いエピソードなのかもしれない．

記事の中で述べた「エントロピーという概念もふくらむことと期待される」は，その後「力学系の大偏差原理」を発見して実現でき，熱に浮かれたような状況もようやく収束した．そして，カオスがようやく認知されて研究会の参加者数も急増し，工学その他の広範な分野の人たちがその応用に取り組み始めた頃，若き志士たちは既に，カオスの研究を糧に生物や脳など，それぞれに新たな未知の領域に足を踏み込んでいた．

カオスを巡る研究は今も様々な形で展開され，未解決の課題も多いが，某学会終了後に諸分野から多彩な人たちが集まり，一人10分の予定で始めた会合が30分ずつとなり，夜更けて食事のできる場所を探し回ったことなども，いまは懐かしい思い出である．

（たかはし・よういちろう，
東京大学名誉教授，京都大学名誉教授）

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第8回 —立式で鍛える論理的思考法—

石鹸膜の形

極小曲面の方程式

小磯 憲史

1. 針金の輪に石鹸膜を張る

1.1 Plateau の発見

ベルギーの自然科学者 J.A. Plateau は 1870 年ごろ針金の輪（閉曲線）に石鹸膜を張る実験をした．色々な輪を石鹸を溶かした液に浸けて引き上げたところ，いつでも石鹸膜が張られた．いくつかの石鹸膜が合わさってできる場合もあるが，その一部をつついて壊していくと，最後にはいつでも交わった部分を持たない 1 つの膜が残った (図 1).

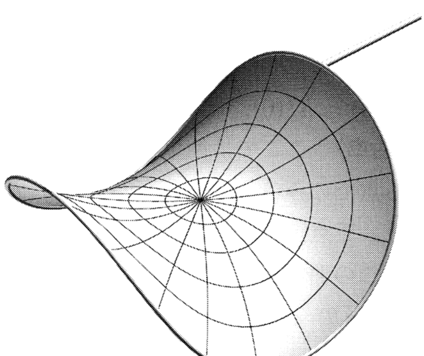


図 1　石鹸膜.

これにちなんで，針金の輪はいつでも単一の石鹸膜を張れるかという問題を数学的に定式化した問題を **Plateau 問題**と呼ぶ.

石鹸膜を抽象化すると，重さのない，純粋に表面張力だけを持つ曲面ということになる．表面張力とは，その曲面の面積が最小になるように働く力である．従って，Plateau 問題は次のように定式化される．

> Plateau 問題：どのような閉曲線を与えても，それを張る曲面のうちで面積最小のものが存在するか？ 存在するならそれはどのようなものか？

この問題を，いくつかの部分的な解答が示された後，最終的に解決したのは 1930 年の T. Radó の論文である．

この問題のように，何かを最小にする（あるいは最大にする）状態は何か，という定式化は**変分法**と呼ばれ，そう定式化された問題を**変分問題**と呼び，多くの物理法則がこの定式化で記述される．Plateau 問題は曲面の変分問題としては歴史上最初のものであると思う．

1.2 石鹸膜とシャボン玉

読者は，石鹸液で曲面を作るというとシャボン玉を思い浮かべるかもしれない．シャボン玉はその内部に空気を閉じ込めているが，ここで石鹸膜といった場合は空気を閉じ込めている部分がない状態を考えている．物理的には，シャボン玉はその面の両側の気圧が異なるが，石鹸膜はその両側の気圧が釣り合っている．

シャボン玉が囲む体積は，石鹸液の表面張力は気圧に比べて非常に小さいとして，シャボン玉を人為的に歪めても一定である．つまり，シャボン玉は次の問題の解になっている．

等周問題：囲む体積が指定された曲面のうち，面積最小のものは何か？

(等周問題という名前はこの問題を 1 次元下げたものにちなんだ名前である.)

通常シャボン玉は完全な球形であるが，枠をはめて歪めることもできる．例えば，シャボン玉を床にうまく落とすと半球面ができる．その半球面の淵に針金を当てて淵を動かすと歪んだ半球面ができる．

囲む体積と境界が指定された曲面のうち，面積最小のものは何か？

2. 石鹸膜の方程式

2.1 グラフ型の方程式

曲面を関数 $z = f(x,y)$ のグラフとして表す．この曲面の面積は

$$\iint \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}\, dxdy \quad (1)$$

であるが，この被積分関数

$$v := \sqrt{1 + f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2}, \qquad (2)$$

または $vdxdy$ を**面積要素**と呼ぶ．この記号の下に，石鹸膜の方程式は

$$\boxed{(v^{-1}f_x)_x + (v^{-1}f_y)_y = 0} \qquad (3)$$

で与えられる．この方程式の解で与えられる曲面のことを**極小曲面**と言う．極小曲面は面積最小とは限らない．

2.2 幾何学的な方程式

方程式 (3) は分かりやすいといえば分かりやすいが，幾何学的な意味がはっきりしない．平面曲線の曲がり具合を表す量として**曲率** κ がある．曲面の場合は 2 次元だから 2 つの曲がり具合もち，それを**主曲率**と言う．そして，主曲率の平均を**平均曲率** H，積を **Gauss 曲率** K と呼ぶ．これらの曲率を説明する前に，結果として極小曲面の方程式がどうなるかというと，

$$\boxed{H = 0} \qquad (4)$$

という実に簡明な式になる．

以下曲率に関して駆け足で説明する．

(平面曲線の曲率) 弧長表示された平面曲線：$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix}$, $((x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1)$ の左向きの加速度を**曲率** $\kappa(s)$ と言う．速度ベクトルは $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ で単位ベクトル，加速度ベクトルは $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ で $x'x''+y'y'' = 0$ だから速度ベクトルに直交し，速度ベクトルに対して左向きの単位ベクトルは $\begin{bmatrix} -y' \\ x' \end{bmatrix}$ であるから，曲率は加速度ベクトルと左向き単位ベクトルの内積 $x'y'' - x''y'$ になる．

平面曲線 $y = h(x)$ が $h'(0) = 0$ を満たすとき，その点における曲率を求めよう．弧長表示の媒介変数 $s = \int_0^x \sqrt{1 + h'(x)^2}\, dx$ を導入する．すると，$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + h'(x)^2}$．よって原点では $\frac{dx}{ds} = 1$．また，

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{dx}{ds}\frac{dy}{dx} = 0, \\ \frac{d^2y}{ds^2} &= \frac{dx}{ds}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = h''(0). \end{aligned} \qquad (5)$$

よって $\kappa(0) = h''(0)$.

(曲面の曲率) ここでは簡単のために接平面が水平である点でのみ考える．曲面が $z = f(x,y)$ と表示され，原点 O において $f_x(\mathrm{O}) = f_y(\mathrm{O}) = 0$ とする．この曲面を，xy 平面上の θ 方向の直線 $(t\cos\theta, t\sin\theta)$ と z 軸を含む tz 平面で切った切り口は $z = h(t) := f(t\cos\theta, t\sin\theta)$ と表示され，その原点における曲率は，

$$A := f_{xx}(\mathrm{O}),\ B := f_{xy}(\mathrm{O}),\ C := f_{yy}(\mathrm{O}) \quad (6)$$

とおいて，

$$\kappa = h''(0)$$

$$= A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta$$
$$= \frac{A}{2}(1+\cos 2\theta) + \frac{C}{2}(1-\cos 2\theta) + B\sin 2\theta$$
$$= \frac{1}{2}(A+C) + \frac{1}{2}(A-C)\cos 2\theta + B\sin 2\theta \qquad (7)$$

となる．この，θ を動かしたときの最大と最小

$$\frac{1}{2}(A+C) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(A-C)^2 + B^2} \qquad (8)$$

を**主曲率**と呼ぶ．そして，平均曲率 $H = (A+C)/2$，Gauss 曲率 $K = AC - B^2$ である．

接平面が xy 平面に平行でない場合は空間座標を取り直すことになる．その形で言えば，曲面の点 P に対して空間座標を XYZ に取り替えて曲面を $Z = (A/2)X^2 + (C/2)Y^2$ で 2 次近似できるが，そのとき点 P において $2H = A + C$ である．

実は

$$\boxed{2H = (v^{-1}f_x)_x + (v^{-1}f_y)_y} \qquad (9)$$

という関係がある．実際，接平面が水平な点 P においては $f_x(\mathrm{P}) = f_y(\mathrm{P}) = 0$ であるから，$v(\mathrm{P}) = 1$, $v_x(\mathrm{P}) = v_y(\mathrm{P}) = 0$．よって，(9) の右辺は $f_{xx}(\mathrm{P}) + f_{yy}(\mathrm{P}) = A + C$ である．詳しくは例えば『変分問題』[3] を参照してもらいたい．

3. 極小曲面方程式の導出

3.1 最小条件と臨界条件

方程式を導く手続きの概略を説明するために，下手な人が作った歪んだお椀に小さい玉を入れよう．入れた直後は玉はコロコロ動くだろうが，いずれはどこかに落ち着く．落ち着く場所はどこだろうか？（お椀が歪んでいるので真ん中とは限らない．）

その答えは，お椀の中で一番低いところ，である．これは Plateau 問題で言えば，石鹸膜を "面積最小の曲面" と言い換えたことに相当する．次は，"面積最小の曲面はどんな形をしているか" に対応して，一番低いところを探せという問題になる．

一般に最小点を探せという問題は複雑な問題である．きれいなお椀なら簡単だが，底がデコボコしていると簡単にはわからない．そこで，微分の出番になる．一番低いところでは，その表面の接平面が水平になっている．そこで，接平面が水平になるという方程式を立て，それを解けばよい．

もちろん，一般には水平であれば最小になっているというわけではないが，候補が絞られるという意味で非常な前進になる．状況がよければ，そのような点は 1 点しかなく，あとは実際にその点が最小となるかどうかを調べればいいことになる．（もしかして，お椀には穴があいていて，一番低いところという問題設定に合わないかもしれない．）

お椀の形を $z = h(x, y)$ と表そう．点 (a, b) で接平面が水平ということは偏微分を用いて

$$h_x(a, b) = h_y(a, b) = 0 \qquad (10)$$

と表せる．しかしこれを直接 Plateau 問題でなぞることはできない．なぜなら，お椀の場合は未知数の空間が xy 平面であるのに対して Plateau 問題の場合は未知数の空間が曲面全体という大きな空間で，x, y 方向に対応するものを持たないからである．

そこで，接平面が水平という条件を点 $\mathrm{P} = (a, b)$ を通る任意の曲線 $\gamma(t)$（$\gamma(0) = \mathrm{P}$）に対して

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h(\gamma(t)) = 0 \qquad (11)$$

となる，と言い換える．曲面 S の面積を $\mathrm{Area}(S)$ と書くことにして，これに対応する Plateau 問題の条件は，面積最小の曲面を S_0 としたとき，曲面の任意の変形 $S(t)$ $(S(0) = S_0)$ に対して

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Area}(S(t)) = 0 \qquad (12)$$

である，ということになる．

以上を整理すると，面積最小（最小条件）をそこでの微分が 0（**臨界条件**）で置き換えた．そのことで問題を解くことが少し簡単になる．

3.2 臨界条件の記述

実際に上の手続きを実行しよう．簡単のため，

xy 平面の領域 D を考え，針金はその境界 ∂D の真上にあるとする．また，曲面 S は D 上のグラフ $z = f(x,y)$ で表示されているとする．この曲面の任意の変形としては $z = f(t,x,y)$ $(f(0,x,y) \equiv f(x,y))$ を考えれば十分である．この変形 $z = f(t,x,y)$ のことを $z = f(x,y)$ の**変分**，その時間微分 $f_t(0,x,y)$ のことを**変分ベクトル場**（の z 成分）と呼ぶ．変形で針金は動かさないから，∂D 上では $f_t = 0$ である．($f(x,y)$ は $f(t,x,y)$ の制限とみなせるので，同じ記号 f を使う．)

(2) で導入した面積要素 v を用いて曲面の面積は

$$\mathrm{Area}(f) = \iint_D v\,dxdy \tag{13}$$

で与えられるから，面積の変化率は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathrm{Area}(f) &= \iint_D \frac{\partial}{\partial t} v\,dxdy \\
&= \iint_D v^{-1}\{f_x f_{xt} + f_y f_{yt}\}\,dxdy \\
&= \iint_D (v^{-1}f_x)(f_t)_x + (v^{-1}f_y)(f_t)_y\,dxdy \\
&= -\iint_D (v^{-1}f_x)_x f_t + (v^{-1}f_y)_y f_t\,dxdy \\
&= -\iint_D \{(v^{-1}f_x)_x + (v^{-1}f_y)_y\} f_t\,dxdy \\
&= -2\iint_D H\cdot(v^{-1}f_t)\cdot v dxdy \qquad (14)
\end{aligned}$$

と計算される．途中で部分積分を用いたが，∂D 上 $f_t = 0$ なので境界項は出てこない．また，最後に式 (9) を用いた．そして，$v^{-1}f_t$ は変分ベクトル場 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_t \end{bmatrix}$ の接平面への法成分になっている．

最後の，変分自身ではなく変分ベクトル場 f_t のみを含む形

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathrm{Area}(f) \\
&\quad = -\iint_D \{(v^{-1}f_x)_x + (v^{-1}f_y)_y\} f_t\,dxdy \\
&\quad = -2\iint_D H\cdot(v^{-1}f_t)\cdot v dxdy
\end{aligned} \tag{15}$$

を，**面積の第 1 変分公式**と呼ぶ．さて，$2H = (v^{-1}f_x)_x + (v^{-1}f_y)_y = 0$ であれば任意の変分に対して第 1 変分は 0 になる．実はその逆も成り立つ．実際，もしある点 P で $H \neq 0$ なら，十分小さい半径 $r > 0$ の円板 D 上で H は定符号となる．そこで，D の内部で正，外部で 0 となる滑らかな関数 $u(x,y)$ をとり，変分 $f(t,x,y) := f_0(x,y) + tu(x,y)$ を考えればその変分ベクトル場は $u(x,y)$ であり，第 1 変分が 0 でなくなってしまう．

即ち，求める極小曲面の方程式が得られた．このように導いた方程式のことを変分問題の **Euler–Lagrange 方程式**と呼ぶ．

4. シャボン玉の方程式

シャボン玉の方程式は次のようになる．

$$\boxed{2H = (v^{-1}f_x)_x + (v^{-1}f_y)_y = \text{定数}.} \tag{16}$$

この解となる曲面のことを**平均曲率一定曲面**と言う．

以下，この方程式について簡単に説明する．石鹸膜の場合と同じように，xy 平面の領域 D を考え，針金はその境界 ∂D の真上にあるとする．また，曲面 S は D 上のグラフ $z = f(x,y) > 0$ で表示されているとする．そして，∂D を z 軸方向に平行移動して得られる筒と xy 平面と曲面で囲まれる立体の体積

$$\mathrm{Vol}(f) = \iint_D f(x,y)\,dxdy \tag{17}$$

が V_0 と指定されているものとする．これは筒の “ふた” で囲まれた部分の体積を考えていることになる．もっとも，注目しているのは体積の差なので，条件はふたの形に無関係である．

このとき，臨界条件は次のようになる．“境界を固定して $\mathrm{Vol}(f) = V_0$ を満たす任意の変分 $f(t,x,y)$ に対して面積の第 1 変分が 0 になる.” このような変分問題は**束縛条件付きの**変分問題と呼ばれる．この条件は，囲まれる体積の第 1 変分が

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{Vol}(f) = \iint_D f_t\,dxdy \tag{18}$$

なので，“境界で 0 で $\iint_D u\,dxdy = 0$ なる任意の関数 u に対して $\iint_D Hu\,dxdy = 0$ となる”，と言い換えられる．

H が定数ならこの条件が満たされることは明らかである．逆を示そう．もし H が定数でなければ，十分小さい半径の 2 つの円板 D_1, D_2 で，D_1 上での H の値は D_2 上での H の値よりも常に大きい，というものがとれる．そこで，D_1 の内部で正，外部で 0 となる滑らかな関数 $p(x,y)$ をとり，それを D_2 に平行移動したものを $\widetilde{p}(x,y)$ とし，関数 $u(x,y)$ を

$$u(x,y) = \begin{cases} p(x,y) & (x,y) \in D_1, \\ -\widetilde{p}(x,y) & (x,y) \in D_2, \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{19}$$

で定める．このとき $\iint_D u\,dxdy = 0$ であるが，

$$\begin{aligned} &\iint_D Hu\,dxdy \\ &= \iint_{D_1} Hp\,dxdy - \iint_{D_2} H\widetilde{p}\,dxdy \\ &= \iint_{D_2} \widetilde{H}\widetilde{p}\,dxdy - \iint_{D_2} H\widetilde{p}\,dxdy \\ &= \iint_{D_2} (\widetilde{H} - H)\widetilde{p}\,dxdy > 0. \end{aligned} \tag{20}$$

ここで，$\widetilde{H}$ は D_1 上の H を D_2 に平行移動したものである．これは仮定に反するから，H は定数でなければならない．

5. 発展

5.1 Weierstrass の表現公式

極小曲面の方程式は，解が存在することが証明されているという意味で，「解ける．」しかし，そのことは解の形がわかるということを意味しない．それにも関わらず，次の形の曲面は極小曲面であり，極小曲面はすべてこの形で表示されることがわかっている．

$$\chi(z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(F \begin{bmatrix} 1 - G^2 \\ \sqrt{-1}\,(1 + G^2) \\ 2G \end{bmatrix} \right). \tag{21}$$

これは **Weierstrass の表現公式**と呼ばれている．ここで，$F = F(z)$, $G = G(z)$ は正則関数で，G は曲面の法ベクトル場に対応している．閉曲線を与えたとき，それが張る極小曲面に対応する正則関数 F, G は存在するが，具体的に F, G を記述する方法があるわけではない．なお，図 1 のグラフィックはこの公式を用いて表示したもので，Plateau 問題を計算機で解いたものではない．

最後に，極小曲面や平均曲率一定曲面に関する日本語の本をあげておく．まず，微分幾何学的に取り扱っているものとして，『曲面論講義―平均曲率一定曲面入門』[2]，『曲線と曲面―微分幾何的アプローチ』[4]がある．また，『動く曲面を追いかけて』[1]はその曲面に近づく動きを取り扱っている．

参考文献

1) 儀我美一，陳蘊剛著『動く曲面を追いかけて』日本評論社．
2) 剱持勝衛著『曲面論講義―平均曲率一定曲面入門』培風館．
3) 小磯憲史著『変分問題』共立出版．
4) 梅原雅顕，山田光太郎著『曲線と曲面―微分幾何的アプローチ』裳華房．

（こいそ・のりひと，大阪大学大学院理学研究科）



数理物理に魅せられて

出口　哲生

1. はじめに

大学時代，日曜日になると気分転換のために，神田の古本屋街へ行き，よく散歩した．特に理工系の本を見て歩くのが好きだった．教科書として読める冊数には限りがあるが，店頭で手にとった本を開いて何となく憧れるだけなら，何冊でも見ることができる．つまり，夢を見ていたのであった．そして，これが私の出発点であった．

学生時代の自分は未熟で，将来研究者になるのかあるいはどのような職に就くかなど具体的な身の処し方を考えるところまで成長していなかった．ところが幸いなことに，現在では大学で講義をしたり，自分の研究をして生きていくことができる．学生時代には全く予想できなかったので，過去を振り返ると不思議な感じもする．

一体どうやって，現在の境遇に至ったのだろう．振り返ると，多くの先生方や友人たちに助けられたことが改めて思い出される．87年4月に大学院に進学し，以後すでに4半世紀近い．この辺で記憶をまとめるのは良い機会かもしれない．もし，若い人に何か示唆する点があれば幸いである．

1.1 数理物理とは

数理物理を一言で定義すれば，物理学の理論における数学的方法一般を研究する学問である．ただし数理物理には様々な内容が含まれ，この言い方では不十分かもしれない．研究の例としては，積分可能な力学系や量子場の理論の数学的基礎も挙げられる．以下，統計力学の可解格子模型や可積分量子スピン系の数理物理を主に考えたい．

数理物理はそれ自体とても美しい学問で，単に学ぶだけでも十分楽しむことができる．趣味の対象として鑑賞に耐えると思う．物理と数学に接し，境界分野的でもある．数式表現の予想を導く作業は，本来の数学の守備範囲ではない．一方，代数や解析など異なる数学的方法を組み合わせることも多い．理論解析の後に最終的には実験などで現実の物理現象との対応まで考察する．

数理物理は現在も急速に発展している．可積分量子スピン鎖の相関関数の研究はリヨン学派の業績を中心にして最近10年間で一段と発展し，相関関数の漸近挙動まで厳密に調べることが可能になった．離散的な格子模型から連続的な場の理論への極限が数学的に厳密に実現されつつある．これは理論物理学の素晴らしい発展であり，量子統計物理学の教科書はその基礎が書き換えられる可能性がある．この発展は代数的ベーテ仮設という地味で素朴な方法に基づく．発想の根元には結び目不変量の記述に便利なホプフ代数があり，意外なことに私の大学院生時代の研究に近い．

2. 大学入学前後

2.1 中学と高校の頃

少し古いが中学の頃から話を始めたい．中学受験の勉強は大変で，やっとのことで私立武蔵中学校に入学した．この 6 年一貫制の学校に入学したことは幸運であった．面白ければ，当面は受験と直接関係ない事柄でも，好きなだけ勉強できる．

この武蔵中学・高校の雰囲気はとても個性的で良かった．授業内容は先生の自主性に任され，検定教科書は全く使用せず，地理の授業では熊捕りの話などユニークな内容が講義され，さらには休講も多かった．すなわち，自分で勉強せよ，という「教え」である．自習室の本棚にあったソ連の数学や物理の副読本のシリーズを読んだり，武蔵大学の図書館も利用できたのでよく行った．放任主義だが，結果的に一人で勉強を楽しめるようになり，自分にとっては素晴らしい教育効果だった．

武蔵では課外活動で自由研究が奨励され，良い研究は卒業式のときに表彰された．自分も表彰を目指して研究した．高校一年生のときに白馬で行われた自然観察会へ参加したのがきっかけで，オオイタドリの葉の縦横比が下からの枚数ごとに次第に変化する様子を指数関数などの数式で表せるのではないか，という研究を行った．生物の百済弘胤先生，臼井陽先生そして当時非常勤の加藤僖重先生（独協大学教授）にとてもお世話になった．しかし外部の先生に読んでいただいたところ，研究動機が理解できない，という評価で落選であった．この結果はショックで，卒業式の前後はあまり良く覚えていない．そしてその後に東京大学の合格発表があった．受験勉強もやったが自由研究にもかなり熱中していたので，合格できたのは助かった．一方，自由研究の失敗の経験は無駄ではなく，特に大学院時代に役立った．またこのとき，研究の意義を他人に理解してもらうことの重要性を悟った．特に，誰に研究成果を伝えるかを考えて適切に表現しないと，問題意識を理解してもらえない．この教訓は現在でも重要である．

2.2 大学入学の頃

周りに自分よりも優秀な人は多かったので，大学に入学するとき，理系の研究者になるのは難しいと思われた．一方，社会科系の科目も好きだったので，大学に入学して科学史を学ぼうと考えた．入学後，中高時代の同級生の桧垣立哉氏（阪大准教授）について行き，広松渉氏と面談したことがあった．とても親切に対応して下さった．しかし，何に興味を持ってどんな本を読んだかを私はきちんと説明できなかった．このとき，言語表現が重要な本来は文系科目の科学史は自分には向かず，物理のように単純な事実を直接扱う学問のほうが良い，と悟った．当時この自覚は重要だった．

学部 1・2 年の頃，課外活動として化学部に所属していた．化学が不得意だったので補おうと考えた．しかし実際は，ポントリャーギンの『連続群論』やグゼ・コスニオフオフスキーの『トポロジー入門』（最後に結び目の話もあった）など数学の本ばかり，伊藤伸泰さん（東大准教授）や小宮根真弓さんと一緒に輪講していた．

和達三樹先生に初めて出会ったのは，教養学部 2 年の夏学期に熱力学・統計力学の授業で先生に教えていただいたときである．このときの熱力学の導入は非常に分かりやすかった．本当は真面目な先生なのだが，授業はジョークに満ちていてとても楽しかった．中高の同級生の武部尚志氏（ロシア国立大学経済高等学校）も同じクラスであった．

2.3 4 年前半の卒業研究の頃

3 年生の冬学期に物理学セミナーというものがあり，プラズマ物理の一丸節夫教授の研究室を選択した．セミナーでは一丸先生の書かれたプラズマ物理の教科書を輪講し，古川信夫君（青山学院大准教授），遠藤哲郎君（東北大学教授）も一緒だった．古川君は一丸先生の質問を上手にかわしていたが，遠藤君は正面からぶつかって苦労していたのを覚えている．私はセミナーの内容をその時点では理解できなかったが，しかしおかげで素励起の物理や，多体問題に興味を持つことになった．

卒業研究では表面物理の塚田捷研究室に所属し，平野琢也君（学習院大学教授）と遠藤君と一緒だっ

た．卒研セミナーで，私は最初に原子核の殻模型を解説し，その後，表面における陽電子対消滅について論文を読んで勉強した．

卒研は面白かった．しかし86年当時，摂動論を用いた多体問題はすでに盛りを過ぎた感じがあり，東京大学理学部の理論研究室ではあまり研究されていない印象を受けた．一方，和達先生の研究室を訪問したところ，多体問題の研究でも指導して下さるとのことだった．そこで駒場キャンパスの和達研究室に進学した．

2.4 大学院進学前後

ところが86年秋のある日，大学院進学が決まって挨拶のため和達研究室を訪問してみると，さっそく新しい研究課題が待っていた．それは和達先生が阿久津泰弘氏（阪大教授）と当時研究していた結び目の新しい多項式不変量の計算であった．結び目不変量とは結び目のトポロジーだけで決まる量のことで，結び目の多項式値の不変量を結び目多項式と呼ぶ．当時駒場にあった和達先生の研究室で，阿久津さんは結び目多項式の基礎とご自分たちの研究成果[1)]に関して説明して下さった．その頃の物理ではトポロジーに関連する研究は稀だったので，私はとても面白いと思った．そして摂動論ではない厳密な手法も新鮮に感じられた．

阿久津さんが説明した結び目不変量は，ある種の $su(2)$ 対称性をもつ高次スピン可解模型[2)]から導かれ，現在の言葉では，量子群 $U_q(sl(2))$ の高次スピン表現に対応する不変量と言える[3)]．スピン 1/2 の場合はジョーンズ多項式を与える．私の課題は，スピン1の結び目多項式を様々な結び目に対して求めることであった．高次スピン結び目多項式は組みひも群の表現行列に対するトレースの形で定義される．直接トレースを計算すると非常に手間がかかる．スピン1の場合，一交点増えるごとにトレースの和の状態数は3倍になる．10交点の場合，状態数はおよそ6万個で，6万個の多項式の和を計算するのは容易でない．

一方，高次スピン表現に付随する不変量も交点数に関して漸化式が成り立ち，これを用いると計算は容易になる．結び目を閉じた組みひもで表し，漸化式を用いてある種の標準形に還元すれば良い．そして，J.S. Birman によって示された同じジョーンズ多項式が対応する異なる絡み目の例を計算したところ，スピン1の場合には異なる多項式を与えた．このため，スピン1の不変量はスピン 1/2 のジョーンズ多項式とは独立と考えられる[4)]．

院進学の前年に，和達研先輩の国場敦夫氏（東大准教授）が可解模型で非常に良い研究成果を挙げ，国場，阿久津，和達の3名共著論文を何本も出版していた．そして京大数理解析研で三輪哲二先生や神保道夫先生との共同研究のため，86年後半は京都に滞在していた．一方，阿久津さんと和達先生は具体的に計算する学生を必要としていた．

和達先生は長い手計算を行う学生が大好きで，私もそういう学生の一人かもしれないと期待され，確か A3 サイズの大きな計算用紙を阿久津さんの最初のセミナーの帰りに持たせてくださった．大きな紙に思う存分計算しなさい，とのご配慮であった．しかし私は本当は計算が得意でなかった．幸いなことに，当時30万円の高価なマッキントッシュ SE30 を祖母に買ってもらっており，出始めのマセマチカをのせて多項式不変量を計算した．今思うと，なんと甘やかされていたことか．

3. 大学院修士課程の頃

3.1 M1 の頃：他の研究は何も知らずに研究

4年生の秋から計算を進め，87年3月末の物理学会で結果を発表した．M1 になる直前だった．発表練習を何回もやった．質問に答えられるか心配したことが思い出される．

学会後の5月頃だったか，表実先生に呼ばれて筑波大学にセミナーに行った．このときセミナーで謝礼を頂き，驚いたことを思い出す．帰りに田上由紀子先生が車で駅まで送って下さった．

阿久津さんと和達先生から与えられた課題はスピン1の結び目多項式の計算で，日付を見ると論文の投稿は5月である[4)]．その後に何を研究するかは特に決まっていなかったと思う．しかし，自分としては不変量の計算だけでは満足でなく，もとになる高次スピン可解模型を理解したいと思った．

課題を与えられた学生の抱く自然な動機である．

このため，二変数多項式不変量（HOMFLY 多項式）をマルコフトレースで構成する方法と，ベクトル表現2個のテンソル積の対称表現に対応する多項式不変量をヤング演算子を用いて導出する方法を阿久津さんに教わると，すぐにベクトル表現 N 個のテンソル積の対称表現に対する2変数不変量に拡張して計算した[5]．学部時代の物理数学演習で対称群のヤング演算子を学び，それを（A 型の岩堀・ヘッケ環の射影子に）拡張した．

面白いことに，岩堀・ヘッケ環の部分代数である Temperley–Lieb–Jones 代数（TLJ 代数）の表現行列から，様々な可解模型が導かれる．そしてTLJ 代数の生成子から射影子を構成してフュージョン模型（合成模型）が導かれ[6]，特別な代数的構造を持つ．87 年の晩秋に気が付き，これで高次スピン結び目多項式のもとになる高次スピン可解模型を，自分の方法で理解することができた．論文[6]は 88 年 1 月末に投稿された．

この結果[6]は現在でも役に立ち，最近，高次スピン XXZ 鎖の相関関数の導出に応用された[7,8]．q 頂点演算子の方法で高次スピン相関関数を導くのは容易でない．しかし，TLJ 代数に基づくフュージョンの方法[6]を用いると，任意の行列要素積に対する相関関数の多重積分表示が導かれる[8]．ここでゲージ変換[1]も重要である．この結果は，結び目の多項式不変量から高次スピン XXZ 鎖の相関関数が導かれる，とも解釈できる．

87年晩秋まで研究は自律的に発展した．そこまで自分たちでやれたことは良かったと思う．しかし，88 年秋から次第に世界の他の研究者の情報が入ってくると，理解するための時間が必要になり，もはや自律的な研究は難しかった．実際，素晴らしい研究が次々と出てくる．そして，当時 M2 の学生の学力の限界も次第に露わになっていく．

87年の秋に，ソ連の研究者が何人か駒場にやって来た．ポリャコフ（A.M. Polyakov），ヴィーグマン（P.B. Wiegmann），ベラヴィン（A.A. Belavin）そしてクリッシュ（P.P. Kulish）などである．ポリャコフが駒場に来たとき，京王井の頭線渋谷駅のホームの上で偶然にも出会い，自分の研究を説明する機会があった．そのとき，彼は非常に興味を持ち，論文を投稿したか，と質問した．私はしばらく前に論文[5]をまとめたので，Yes と答えたところ確か，ドリンフェルトの量子群との関係が知りたい，と言ったと思う．当時の学力では質問の意味を良く理解できなかったが，真剣に聞き直していれば，もしかすると量子群との関係を自力で解明できたのかもしれない．現実には，量子群と結び目不変量の関係はその後，ソ連のレシェティキン（N.Yu. Reshetikhin）やドリンフェルト（V.G. Drinfeld）によって一段と深いレベルで研究されていく．

87 年の晩秋に，クリッシュが和達研究室を何日間か訪問した．ラーメンを食べたいと希望され，国場さんと一緒に渋谷の中華料理屋に案内したことを思い出す．クリッシュは和達研究室における結び目多項式の研究の存在を知り，それを確かめに来たのであった．和達先生は最初，不変量の研究には全く触れずに済まそうとされた．しかし彼は満足できず，まず最初に当時 M1 の私に不満をぶつけてきた．厳しいやり取りもあったことが今は懐かしい．そこで和達先生は結び目多項式の研究を説明された．クリッシュは，自分はまだ見てないが，レシェティキンが不変量に関して何か研究している，と和達先生に伝えた．

今思えば神保先生の量子群の論文は *Lett. Math. Phys.*（LMP）からすでに出版され，ドリンフェルトの量子群の論文はまだだった．しかし，LMP は当時東大本郷の数学科図書室になく，院生が気が付く可能性は小さかった．また論文が手に入った後でも，量子群の概念を理解するのにかなり時間がかかった．一方，国場さんは神保先生とも共同研究していたので，この線で研究連絡の可能性は十分あった．しかし，結び目多項式の研究は共同研究であり，どこまで話してよいかの判断は簡単でなかった．当時かなり悩んだが，こういうことはいろいろ経験しないと判断できないと思う．

3.2 京都での国際会議とバンフ夏の学校

88 年 9 月頃だったか，学習院大学で数理物理の夏の学校があり，量子群がトピックだったので飛び込

みで申し込んで講演した．主催者の江沢洋先生には大変お世話になった．このときに河野俊丈先生に初めてお会いしたと思う．三町勝久先生，野海正俊先生そして増田哲也先生にも初めてお会いした．

88年10月に谷口シンポジウムが開催され，海外の多数の著名な研究者が京都に来た．最初に京大数理解析研で国際会議があり，私は申し込んで結び目多項式の研究を発表した[9]．本来は指導教官の和達先生か実質的な指導者の阿久津さんの役目だったが，お二人とも参加されず，M2の私に講演を譲られた．初めての英語講演で，バケツの周りにロープを巻き，閉じた組み紐を表すという熱演だった．制限時間を超過したが，座長のイジクソン（C. Itzykson）は続けさせてくれた．と言っても，話すだけで精一杯で時間を気にする余裕はなかった．当時はWittenのトポロジー的場の量子論の最初のプレプリントが出た頃で，結び目多項式に興味をもつ参加者も多かったと思う．講演させて下さったこの国際会議の組織委員の神保先生，三輪先生，土屋昭博先生に深く感謝したい．

この会議でバクスター（R.J. Baxter），マッコイ（B.M. McCoy），パーク（J.H.H. Perk）と出会った．カーディー（J. Cardy）やザモロヂコフ（A.B. Zamolodchikov）にも会った．マッコイ氏の英語は難しくて聞きとれなかった．可解なカイラル・ポッツ模型についての講演だったが，現在私はこの模型を研究しており，ある意味ではマッコイ講演の真の理解に4半世紀かかったとも言える．

88年末か89年の初め頃だったか，河野先生が都内の大学の集中講義で量子群と結び目不変量を解説され，聞きに行ったことがあった．自分の方法で導いた不変量が，量子群の言葉で美しく書き直されるのを見るのは不思議な気持ちがした．さらにWittenのトポロジー的場の理論が普及した後，必要な勉強量は一気に増加した．研究上の厳しい競争の現実を受け入れるのは容易でなかったが，ここでオオイタドリの経験が活きた．予防接種と同様に前に厳しい経験があれば耐えられる．今振り返ると，これもとても良い経験だった．もちろん，自分の学生に同じような経験をさせようとは到底思わない．しかし，研究の残り方を見届けた経験は将来の方向を探るのに役立つと思う．さらに，現実は複雑で，相関関数の研究では10年後に流れが逆転し，量子群の方法よりも可解模型に固有な性質が重要となった．これは当時の自分の研究に近く，ある意味では復活とも言える．結局，基礎研究では多様性が命なのかもしれない．

89年8月にカナダのバンフで開催された夏の学校（NATO Advanced Studies Institute）に参加した．主催者のH.C. Lee氏の好意で滞在費を負担してくれた上に講演まで依頼された．これはとても幸いなことで，おかげで私たちの研究は欧米で少し知られるようになり，レビュー論文[10]の引用回数が多いのはその効果もあるかもしれない．実際，この夏の学校にはサイバーグ，ジャキーフやフレーリッヒを初め，素粒子関係の著名な研究者が多数参加していた．学生の中には後でバシリエフ不変量の研究で有名になるバル・ナタンもいた．スーダーシャンにも会えた．食堂で自己紹介して下さったのを覚えている．アフレック（I. Affleck）も途中から参加していた．ウー先生（Y.S. Wu）にも出会った．ファウラー教授とは夕食をともにし，そのときフラーム（H. Frahm）も一緒だった．韓国のスー・ジョン・レイとも出会った．

バンフでの夏の学校の前にトロント大に行き，結び目の研究で世界的に有名な村杉邦男先生を訪問した．村杉先生のことはブルーバックスの組みひもの本で知った．そして和達先生がプレプリントを送り，何回か手紙のやり取りがあった．村杉先生にはその後何回もお会いし，本当にお世話になった．このときはハートハウスというトロント大の施設に宿泊を予約して下さった．石造の古い建物で威厳があり，グランドピアノや図書室もある素晴らしい施設だった．夏休み中で，屋外テラスで夜にバンドが演奏していたのを思い出す．

バンフ夏の学校の後にエドモントンに行き，熱場の量子論で有名な梅沢博臣先生を訪問した．このとき，山中由也さん（早稲田大学教授）に空港まで迎えに来てもらうなど，お世話になった．

フレーリッヒ氏はバンフでの私の講演に好意を



2008 年 12 月，キャンベラにて．左から，マッコイ，オーヤン，バクスター，パーク，バクスター夫人，筆者（西野晃徳氏撮影）．

寄せられ，翌年の 90 年夏にチューリッヒに招待してくれた．滞在費をもらって ETH で 3 週間勉強した．ご自宅に 2 回も招かれ，お世話になった．

3.3 欧米で顕著な学問上の理想主義

M2 から D1 の頃，私は国際的な研究の渦に巻き込まれ，それ以降数年間，自分のペースに戻るのは容易でなかった．しかしその頃に感じたことは，欧米特にヨーロッパの人たちは学問を進める上で美しい理想を掲げることが重要と考えているのではないか，ということである．対照的に日本では学問の技術面を重んじる傾向が強いと思われる．本当は理想や哲学と学問上の技術のバランスが必要である．しかし日本では哲学や理想の重要性を強調して良いと思う．哲学は学問をまとめるのに役立ち，どの方向に発展させるのかという理想がないと，論文を読んで後に続く人は出ない．つまり本当の美しさには強さも秘められている．

4. キャンベラ（キオロア）での会議

時は流れ，面白いことに，マッコイ，パーク，オーヤン，さらにはバクスターと踵を接して競争することになった．カイラル・ポッツ模型の相関関数の導出が目標である．特に西野晃徳氏（神奈川工科大）の研究[11]により，量子 XXZ 鎖のループ代数の対称性の重要性が認識され，潮目が変わったようだ．(2010 年 1 月のストーニー・ブルックでの国際会議も参照[12]）写真は，08 年 12 月，キャンベラでマッコイ氏の 68 歳の誕生パーティーを催すために集まったところである．左から，マッコイ，オーヤン，バクスター，パーク，バクスター夫人，そして私である（西野氏撮影）．現在では競争もまた楽しい，という感じである．バクスター氏に注目されるのはさすがにちょっと怖いけれども．

5. 最後に

数理物理は日本のお家芸とも言える学問分野である．戸田盛和先生や広田良吾先生，そして京大数理研の佐藤スクール，物性では高橋實先生など，世界をリードする研究者が多い．自分も良い研究を行いたいが，もう一つの役目は若い世代にこの流れを伝えることである．今や出会った当時の和達先生の年齢を越えている．先生のように多くの人材を育てるのは難しいが，若い人が伸びる手助けができるかどうか，今後の私の課題である．

参考文献

1) Y. Akutsu and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** (1987) 3039–3051.
2) K. Sogo, Y. Akutsu and T. Abe, *Prog. Theor. Phys.* **70** (1983) 730–738; 739–746.
3) A.N. Kirillov and N. Yu. Reshetikhin, in *Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups*, ed. V.G. Kac (World Scientific, 1989) pp.285–339.
4) Y. Akutsu, T. Deguchi and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** (1987) 3464–3479.
5) T. Deguchi, Y. Akutsu and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **57** (1988) 757–776.
6) T. Deguchi, M. Wadati and Y. Akutsu, *J. Phys. Soc. Jpn.* **57** (1988) 1905–1923.
7) T. Deguchi and C. Matsui, *Nucl. Phys. B.* **814** [FS] (2009) 405–438.
8) T. Deguchi and C. Matsui, Correlation functions of the integarble higher-spin XXX and XXZ chains through the fusion method, to appear in *Nucl. Phys. B.*
9) T. Deguchi, M. Wadati and Y. Akutsu, *Adv. Stud. in Pure Math.* **19** (1989) pp.193–285.
10) M. Wadati, T. Deguchi and Y. Akutsu, *Phys. Reports* **180** (1989) 247–332.
11) A. Nishino and T. Deguchi, *Phys. Lett. A* **356** (2006) 366–370.
12) Simons Center for Geometry and Physics Workshop on Correlation Functions for Integrable Models 2010: Jan. 18–22, 2010, Stony Brook University, http://insti.physics.sunysb.edu/scgp/conf/IntegrableModels2010/talks.html

（でぐち・てつお，お茶の水女子大学理学部）



ある応用数学者の弁明

岡 本　久

1. はじめに

世の中に数学者の数は多いけれど，数学者になろうとした理由と言えば大体決まっているようなものらしい．G.H. ハーディーの “A mathematician’s apology” によれば，1. 数学しかできなかったから，という理由と，2. たまたま偶然そうなった，という 2 種類だそうである．ハーディーによれば 2 の理由は 1 の理由の謙遜の形だそうであるから，1 のみを考えればよいらしい．しかし，私が推測するに，ハーディーは，「私は数学がとてつもなくできたから数学者になったのだ」ということの謙遜形で 1 をあげたのではないだろうか．そういう人がいてもおかしくはなかろう．でも，私はこうした理由で数学者になったのではない．高校時代から数学は好きであったし，同級生に数学で負けた記憶はない．しかし，○○県で一番だった，という程度のことですぐにプロの数学者になれるとは，てんで思っていなかった．この点で私の洞察力は確かだった．本連載を執筆されている他の数学者の先生はいざ知らず，私は，数学に対するあこがれはもっていたものの，数学がそれほど好きではなかったのである．それがなぜ京都大学で数学を飯の種にしているかと言えば，いささか奇妙な偶然の重なり合いと言うしかない．

2. 小さい頃

数学を志す人間は誰でもそうだろうと思うが，小さい頃に何か有頂天になるようなことを経験すると後々まで記憶に残るものである．私の場合には，小学 6 年生の頃だったか，台風で学校が休校になったことがあった．そのとき，算数の宿題をやっていて，ふとしたことから，3 辺すべてが整数になる直角三角形が無数にあることに気づいた．これはユークリッドの昔からわかっていたことではあるが，田舎の小学生がユークリッドを知るよしもなく，ただ当てもなく計算していたら気づいたのである．a を奇数とし，$(a^2-1)/2$ を b とすれば，$(b+1)^2 = b^2 + a^2$ となる，という事実であるが，小学生には文字が使えるわけもなく，ただひたすらありとあらゆる数をはめこんでいったら正しい答えが出る，ということだけに有頂天になった．$5^2 = 3^2 + 4^2$ だけが整数の直角三角形ではなかった．私には発見であったけれども，これを誰にも言うことはなかった．庭の片隅にとてもきれいな蝶を見つけたときに何もせずにそのまま見入っているといった感じである．受験勉強しているときにはこうした感覚は出てこなかった．学位を提出するときにも，「有頂天」といった感覚はなかった．やはり，締め切りに切羽詰まって何か

する，ということでは有頂天にはなれないのであろう．むしろ，ぼけーっとしていて突然に何の脈絡もないところから思わぬものが見えてきたときに幸福感が感じられる．こうした経験は他の数学者の方々にもきっとあるものと思う．

中学高校の 6 年間はあっという間に過ぎた．この間いろんなことがあったけれども，数学に関しては大して印象が残っていない．世界史や漢文などに夢中になったけれど，これは今，数学史を勉強するときに大いに役立っている．受験勉強も結構役立つものである．

3. 大学時代

東大では 2 年生のときに進学振り分けというのがある．それを前にして，理科一類の各学科から様々な先生方が駒場にお越しになり，進学ガイダンスを行う慣習であった．私は数学と物理のガイダンスに出たのだけれども，そこに人生の岐路があるとは，そのときは夢にも思わなかったのである．どちらが先だったかはもはや覚えていないが，物理のガイダンスではある教授が実験物理の面白さを説明していた．数学のガイダンスでは私の師匠となる藤田宏教授とその他 2 名で説明が行われた．さて，当時私の心は物理に傾いていたのだけれど，物理のガイダンスが終わって質疑応答になったとき，ある学生が，

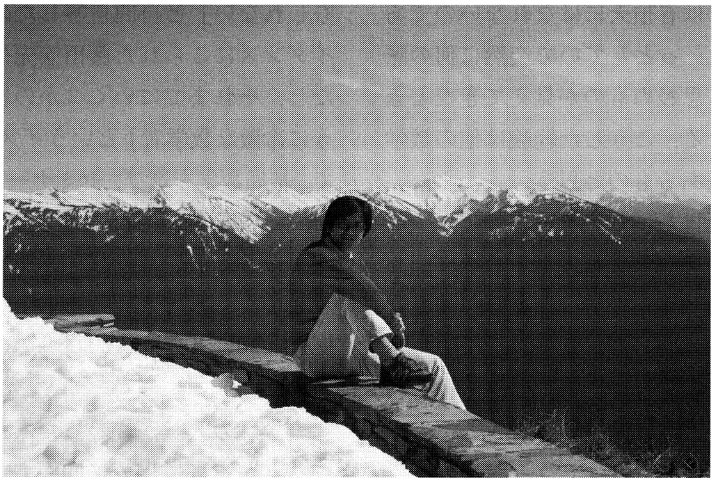
「先生，物理では数学ができないとついていけないということだそうですが，どれくらい数学ができないといけないのでしょうか？」

と質問したのである．そしたら先生曰く，

「私がやっているのは実験物理だから，数学なんてサイン・コサイン・指数関数さえ知っていれば十分だ.」

…．ガーンときた．たぶん先生は学生が萎縮しないように，激励のつもりで発言されたのだと思う．だが，私の受け取り方は違っていた．「私は数学も結構勉強してきたし，それが必ずしも役立たないのならば物理ではなく数学を選んだほうがいいかもしれない」と自問自答したのである．数学のガイダンスにこられた藤田宏先生は優しい感じだったし，それまでにいくつかの本で読んだ「氷のように冷徹な数学者」というイメージではなかった．で，結局数学を選び，セミナーでは藤田ゼミに入った．あのとき，「サイン・コサイン…」と演説された素粒子実験の教授はその後ノーベル賞を受賞され，いまや誰でも知っている存在となったのだけれど，私はそのときの自分の判断を今は後悔していない．

大学院の入試が終わったあたりでは大学院に進むことが本当に自分に向いているのかどうか迷っていたし，「物理のほうが就職にもよかったのでは」と思ったり，「企業に飛び込んでいったほうが給料はいいだろう」というふうに散々煩悩に悩まされた．前者は正しくなかったし，後者も最近は必ずしも正しくはない．ともあれ，大学院へ進み，ここではひたすら勉学に励んだ．勉強したのは偏微分方程式である．同じ偏微分方程式でも線形と非線形では全く世界が違う．また，応用系の微分方程式となればいやでも非線形をやらねばならない．同じ応用系でも，ナヴィエ–ストークス方程式，反応拡散系，シュレーディンガー方程式では各々全く違うのである．ピアノ協奏曲でもモーツァルトとラフマニノフでは全く違う，というのと似たような感じである．私が職に就けたのはナヴィエ–ストークス方程式のおかげである．これに興味を持ち始めたのは大学院に入った頃であった．師匠である藤田先生が専門家であるから自然に興味を持ち始めたのかというと必ずしもそうではない．当時藤田先生はナヴィエ–ストークス方程式とは違うものに興味が移っていたようで，その頃の藤田セミナーでナヴィエ–ストークス方程式で飯を食っていこうと思っていたのは私一人だったかもしれない．今井功先生の流体力学の教科書を読んで，「これって物理の本というよりは数学じゃん」という感想を抱いた．物理のような数学のような対象と言えば素粒子物理学しかないという程度の感覚しか持ち合わせなかったものにとって，流体力学はとっても魅力的なものに思えたのである．その後，


シアトル郊外のオリンピック半島にて．1987年．

この方程式のおかげで飯が食えるようになった．

4. 修業時代

ひょんなことから結婚し，その後まもなくしてアメリカに1年間滞在する機会を得た．1986年のことである．滞在したのはミネソタ大学にある研究所 Institute for Mathematics and Its Applications (IMA) である．当時はレーガン政権で，あまり予算が潤沢だったとも思えなかったのだけれど，無名の日本人にも滞在費は出してくれた．ここは本当に刺激的なところだった．周りのポスドク連中は賢い奴ばかりだったが，嫌みな奴は一人もいなかった．IMA でもひたすら論文を読み続けた．いわゆる濫読時代である．若かったこともあって，他人のアイデアを吸収するのも楽々とできた．IMA ではほぼ毎週セミナーが行われていた．これに皆出席したのは私と当時所長をしていた Hans Weinberger 氏のみであったと思う．同僚たちのバックグラウンドはてんでバラバラだった．あるセミナーでは出席者が8人で，8人が8人とも違う母語を話す人間であった，ということもあった．この1年間はシアトルに行って Robert Miura 氏と会ったことを除き，ずっとミネソタにこもっていた．結局，一年間で論文を書いたわけではなかったけれど，ネタは大いに仕入れることができた．Robert Miura 氏といえばソリトンが最も有名であるが，この頃には数理生物学の研究に転向しており，彼の研究スタイルからも大きな影響を受けた．

思い起こせばこの頃（20代の後半から30代の前半）には多くの人に親切にしていただき，私が今あるのもこういう人々の親切・激励のたまものであると思う．ブリティッシュ＝コロンビア大学にいた Robert Miura 氏，広島大学におられた三村昌泰先生，京都大学の西田孝明先生などから，直接間接に多大の影響を受けた．この頃，Andy Majda という名前を意識するようになった．Majda 教授はバークレーやプリンストンを経て，今はニューヨーク大学のクーラント研究所の教授である．大学を出てから30年余りになるが，Majda 氏のように博学な人物は他に知らない．乱流のことでも数値計算のことでも，何でも知っていた．知っているだけでなく，一番難しいところがどこにあるかを分析し，それを解決するアイデアを生み出すこともできた．「この人にはかなわない」と脱帽する人物である．Majda 氏のような人物を見ると，自分が恥ずかしくなるけれども，卑下してばかりいては何も解決しない．無節操なやり方でもいいから，自分以外の人にはなかなかできそうもない，という問題を見つけることだと，自分に言い聞かせた．それは，数学の中にいながら，数値計算を本質的に使うことだ，と思うようになった．3次



1998 年，ベルリンで ICM が行われたとき，講演を終えたところ．東海林まゆみ氏撮影．

元ナヴィエ–ストークス方程式の解の滑らかさに関するルレイの未解決問題にはずいぶんと魅了されたけれども，全く歯が立たなかった．いつまでもこれに拘泥すべきでない，と早々に見切りをつけたのがアメリカから帰った頃である．オマル・ハイヤームのルバイヤートには次のような詩がある．

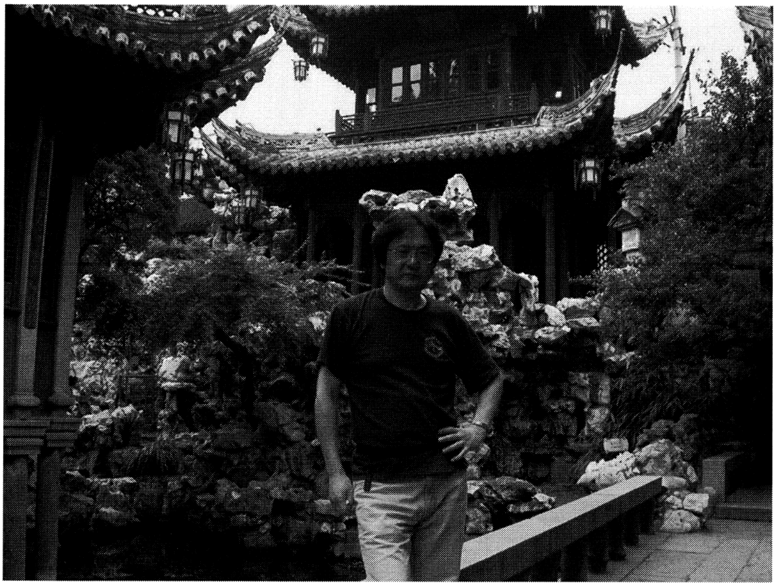
愚かしい者ども知恵の結晶を求めては
大空のめぐる中でくさぐさの論をたてた
だが，ついに宇宙の謎には達せず
しばしたわごとしてねむりこけた

3 次元ナヴィエ–ストークス方程式の解の滑らかさを巡る議論もそんなものかもしれない．ただ，ナヴィエ–ストークス方程式には犯す能わざる美しさがあり，多くの科学者が魅入られるのは自然なことである．

流体の方程式を喩えれば，白く満ちたる冬の夜の月
NS に戦い挑む数学者，割れて砕けて裂けて散るかも

5. 数値計算のこと

学生の頃には数値計算に興味はなかったが，修士論文で有限要素法について書いたのが契機となって数値計算に目覚めたのは 20 代の半ばを過ぎたあたりである．現在は日本女子大学にいらっしゃる東海林まゆみさんにいろいろと教えてもらいながら，コンピュータを動かした．当時 UNIX マシンは数が少なく，CPU 使用時間は奪い合いであった．こういうときに京都大学からお誘いを受けた．京都大学数理解析研究所には本格的な UNIX マシンが備わっており，いくらでも使うことができた．私にはパラダイスであった．ここでナヴィエ–ストークス方程式に対するコルモゴロフ問題というのを考え，ひたすらコンピュータを回した．結構不思議な事実をいくつも発見することができた．証明はたいていできなかったから，いわゆる有名雑誌には載らなかったけれども気にしなかった．こういう，数学のような物理のような，といった結果を受け入れてくれる雑誌もある．自分を受け入れてくれるところへ行く，と思い切れば気にはならない．30 代から 40 代にかけて同僚であった室田一雄氏が昔，「本当にオリジナリティーの高い結果だと自負できる論文がえてして reject になったりする」と言っていたことがあったが，彼の言葉にも元気づけられた．有名な雑誌に載ることだけを目指していたら，ナヴィエ–ストークス方程式の応用などできるものではない．そもそも私の言っていることを理解してくれないレフリーが相当数



上海の豫園にて．2006 年．

あったし，理解されなくてもめげない精神力が必要であった．1998 年の ICM で講演したときには V. Arnold 氏が私の数値結果をなかなか信用してくれなかったが，世の中そんなものであろう．当初は信用されなくてもいずれはわかってくれるはずだ．

数値計算はときどき人をだます．丸め誤差は不可避だし，そもそもプログラムのバグは取り除いたつもりでもなかなか消えないものである．全くでたらめな数値が返ってきたらおかしいことにはすぐに気づくのだが，問題なのは，ほぼ正しい結果が出ているけれども小さなバグのせいで間違った答えとなっているケースである．こういうのに出くわすと，大変痛い目に遭う．細部を詰めるということになれば純粋数学の定理の証明とたいして変わらないくらい頭を悩ますことになる．

6. アジアのライバルたち

最近は中国や韓国に多くのライバルが出てくるようになった．米国応用数理学会の東アジア支部というのが年会を行うようになったし，応用数学の世界でもアジアの擡頭は著しい．韓国や中国に優れた数学者がいることは知られるようになってきているが，他にも例えばブルネイ王国のブルネイ大学にも立派な研究者が集まり始めている．藤田宏先生が始められた日中数値解析セミナーという国際シンポジウムが1992 年から続いており，このシリーズが数値解析の発展に寄与したことは大きい．ここでも当初日本は資金的に優位であったこともあり，日本側はイニシャティブを持っていたように思うが，このごろは負けそうな気すら起きてくる．香港やシンガポールでは日本の大学よりも給与を高くできるから，優れた研究者を世界中から集めることが可能となっている．最近は中国からも韓国からも招待講演を依頼されるけれども，彼らはもはや日本を特別な存在とは思っていないし，十分に追い抜けると思っているようだ．金の使い方も我々とは違う．2006 年の 5 月に上海の復旦大学に招待されたときには，空港に着いてから滞在中を含め，再び空港に戻るまで，完全に VIP 扱いされ，えらく恐縮した．繁華街でのレセプションも大変豪華であった．中国の発展を間接的に感じたときである．復旦大学では大きな研究棟が建てられている最中で，一日中，つまり真夜中も，建設の槌音が響いていた．そのとき寝られなかったので作ったのが次の戯れ歌である（杜牧先生ごめんなさい）．

千里鶯啼緑映紅　千里，うぐいす啼いて，みどり紅に映ず
摩天楼谷酒旗風　摩天楼の谷，酒旗の風
復旦四百八十楼　復旦（大学），四百八十楼
建設騒音烟雨中　建設騒音も烟雨のうち

7. 将来への心配

世界のライバルを見ると日本の将来が心配になってくるが，私が見るところ，日本はまだまだ捨てたものではない，という感じである．確かにアジアの応用数学のレベルは上がっているが，流行のことだけを論文にしようとする傾向が強すぎる．Citation indexにこだわりすぎているのも問題であろう．日本ではこうしたindexに頼らなくても重要な人材をそうでない人材と区別することはできている．少なくとも今は．韓国や台湾はindexに頼りすぎているから，本当に独創的なものが出てくる可能性はそれほど高くないのではないか，とも思う．

心配な点がないわけではない．日本では若手を支援する金が足りない．我々の世代が忙しくなりすぎている．日本には女性数学者が少なすぎる．応用数学を数学と見ない人が今でも相当数いる．こういったことは悩みの種であるが，簡単には治らないであろう．このごろはやけに忙しい．ストレス発散にはよいワインを飲むことである．I氏とK氏とは時々飲みにゆくが，数学に対する思いは似通ったものである．数学の将来の心配をし始めるとよいワインもまずくなってしまう．

若い人々には，時間を忘れて論文を読め，と言うことにしている．『海舟語録』に曰く「研究といふものは死んで初めて止むもので，それまでは苦学です．一日でもやめるといふことはありません．」これは大事なことだと思う．また，顧炎武の顧亭林文集に，

人の学を為す，日に進ま不れば則ち日に退く．
独り学んで友無ければ即ち孤陋にして成り難し．
久しく一方におれば則ち習染して自ら覚らず．

とあるのも同じような思想であろう．こうした気持ちを学生さんにも伝えたいと思う．もっとも，勉強さえすればOKというものでもない．同じ勝海舟が『氷川清話』では，努力一辺倒となることを戒めている：曰く，

> 功名をしようといふ者にはとても功名はできない．きっと戦に勝たうといふ者にはなかなか勝ち戦はできない．これらはつまり無理があるからいけないのだ．詮じつめれば余裕がないからの事ヨ．

今の京都大学教授にも余裕はなくなりつつある．これではいけない．何とかしなければ…

8. 結論

結局，人間の生き方など，どこでどう転ぶかわからないのである．修業時代にひたすら勉学に励んだことだけは間違いないし，少しはそれを誇ることができる．しかし，今思えば，若い頃は本当に馬鹿なことをしていたし，よくこれで生き残れたものだとあきれるほどである．藤田先生のおかげで生き残れたのであろうが，それだけではなかろう．運命というものかもしれない．進学振り分けで物理学への未練を断ち切らなかったら，いまごろは京都ではなく岐阜県の山奥にいるかもしれないのである．

古今和歌集にこういう歌がある．流体力学になじんだ者としてこれほど納得させられる歌はない．

世の中はなにか常なるあすか川，
昨日の淵ぞ今日は瀬になる．

（おかもと・ひさし，京都大学数理解析研究所）

特　集（2010 年 10 月号予告）

曲面の不思議

その多彩な魅力に迫る

曲面は現代幾何学のふるさと	森田　茂之
曲面に親しむ	逆井　卓也
代数曲線	小木曽啓示
双曲幾何と曲面	小島　定吉
極小曲面と変分問題	宮岡　礼子
複素解析と曲面	志賀　啓成
特異点をもつ曲面の幾何学	梅原　雅顕
物理学とリーマン面	細野　忍
[コラム]	阿原　一志
[コラム]	宮岡　礼子
《名著に親しむ》	二木　昭人
[インタビュー]	森田　茂之

本体 952 円

特　集（2010 年 8 月号）

力の統一にむけて

四つの力から最終理論へ

巻頭言	村山　斉
重力　リンゴから天体，宇宙まで	佐々木　節
光と電子　QED の誕生とその検証	仁尾真紀子
弱い力　縁の下の…	日笠　健一
強い力と色のゲージ理論　核力からクォーク・グルーオンへ	初田　哲男
電弱統一理論　電磁気力と弱い力，ヒッグス力	浜口　幸一
大統一理論　電磁気力と弱い力，強い力	久野　純治
余剰次元　統一への新たな道筋	野村　泰紀
統一理論としての超弦理論	渡利　泰山
[コラム] 力は統一されるべきか	大栗　博司
[インタビュー]「力の統一」への期待と模索	村山　斉
《連載》 目で見て学ぶ量子力学　その 20	外村　彰
《現象から方程式を創り出す》 第 7 回	高橋　大輔
《物理の道しるべ》 第 17 回	細谷　暁夫

本体 952 円

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．ちょうど南部先生がノーベル賞を受賞された 2008 年は日本人，および日本出身者が計 4 人受賞するという快挙を成し遂げ，日本の科学レベルもまだまだ捨てたものではないなと，日本中が祝福ムードにわいたように記憶しています．

「物理を楽しむこと」ということが巻頭の中で書かれています．この中の「物理」という言葉は，例えば「数学」「音楽」「人生」といった言葉にも置き換えられるのではないでしょうか．特集の記事を読んでいただいて，是非，「楽しむこと」のヒントを見つけていただければ幸いです．私も「楽しむこと」の神髄を早く身につけたいものです．

第 2，第 3 の南部先生が将来の日本から登場することを願います．　(R)

数　理　科　学　9月号

2010 年 9 月 1 日発行

数 理 科 学 編 集 部　　発行人 木　下　敏　孝

TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ©　株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁